Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. XIII. 1962 49–51

ZUR EINIGEN INTEGRAL-ABSCHÄTZUNG

Von

Yoshikatsu WATANABE

(Eingegangen am 30. Sept. 1962)

Der Verfasser bedurfte im gewissen statistischen Problem das Integral

$$J=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\alpha(1-\zeta^2)}\,d\zeta}{1+\beta\zeta^2}$$

zu ausrechnen, wobei $0<\alpha<a$ (endlich), und $0<\beta<$ gewisses $b<1$ mit $\gamma=\alpha/(\alpha+1)$, $\delta=\beta/\gamma<1$ sind. Wegen $0<\beta<1$ kann man den Nenner in eine Potenzreihe entwickeln und dann gliedweis teilintegrieren, so dass

$$\begin{aligned} J &= \sum_0^\infty(-1)^\nu\beta^\nu\int_0^1\zeta^{2\nu}\operatorname{arctg}\sqrt{\alpha(1-\zeta^2)}\,d\zeta \\ &= \sum_0^\infty\frac{(-1)^\nu\beta^\nu\sqrt{\alpha}}{2\nu+1}\int_0^1\frac{\zeta^{2(\nu+1)}d\zeta}{(1+\alpha-\alpha\zeta^2)\sqrt{1-\zeta^2}}\,(=A_{\nu+1}). \end{aligned}$$

Wird nun um den Integrand zu rationalisieren $\sqrt{1-\zeta^2}=\zeta z$ gesetzt und jedes nach Partialbruchzerlegung erhaltene Glied integriert, so findet man eine Rekursionsformel

$$A_{\nu+1}=\int_0^\infty\frac{dz}{(1+(1+\alpha)z^2)(1+z^2)^{\nu+1}}=\frac{1}{\gamma}A_\nu-\frac{1}{\alpha}B_{\nu+1},$$

wobei

$$A_0=\int_0^\infty\frac{dz}{1+(1+\alpha)z^2}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}\,\frac{\pi}{2}$$

und

$$B_{\nu+1}=\int_0^\infty\frac{dz}{(1+z^2)^{\nu+1}}=\frac{1.3.\dots(2\nu-1)}{2.4\dots(2\nu)}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\lfloor 2\nu}{(2^\nu\lfloor\nu)^2}\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}c_\nu$$

sind, deren $c_\nu=$der Koeffizient des x^ν in die Entwickelung von $1/\sqrt{1-x}$ ist. Mit Hilfe von der obigen Rekursionsformel erhält man ferner

$$A_{\nu+1}=\frac{A_0}{\gamma^{\nu+1}}-\frac{\pi}{2\alpha\gamma^\nu}\,[c_0+c_1\gamma+c_2\gamma^2+\dots+c_\nu\gamma^\nu]\;(=d_\nu),\quad \nu=0,1,2,\dots.$$

Dabei bedeutet die eckig-geklammelte Summation $\sum_0^\nu c_\nu\gamma^\nu=d_\nu$ den Koeffizient von x^ν in die Entwickelung der Funktion $f(x)=1/(1-x)\sqrt{1-\gamma x}$. Zwar $0<\gamma<1$ gemäss ist die Funktion regulär in $|x|<1$, und sie ist entwickelbar zur unendlichen Reihe, welche dort absolut und gleichmässig konvergiert. Dieselbe Tatsache gilt noch für die Funktion $f(-x)$ und ebensowohl bei $f(-y^2)=\varphi(y)$ in $|y|<1$. Daher kann man sie gliedweis integrieren und kennen dass

$$\int_0^{\sqrt{\delta}}\varphi(y)dy=\int_0^{\sqrt{\delta}}\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{1+\gamma y^2}}=\sum_0^\infty(-1)^\nu d_\nu\int_0^{\sqrt{\delta}}y^{2\nu}dy=\sum_0^\infty\frac{(-1)^\nu d_\nu\sqrt{\delta}^{2\nu+1}}{2\nu+1}.$$

Deswegen ergibt sich

$$J=\sum_0^\infty(-1)^\nu\frac{\beta^\nu\sqrt{\alpha}}{2\nu+1}A_{\nu+1}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sum_0^\infty\frac{(-1)^\nu\delta^\nu}{2\nu+1}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_0^\infty\frac{(-1)^\nu}{2\nu+1}d_\nu\delta^\nu\right].$$

Die erste Summation führt zu $\frac{1}{\sqrt{\beta}}$ arctg $\sqrt{\delta}$ vermöge $\sqrt{\delta}<1$, während die zweite, wie oben gesagt, zu

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\delta}}\int_0^{\sqrt{\delta}}\frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{1+\gamma y^2}}=\frac{1}{\sqrt{\beta(1+\alpha)}}\int_{u_0}^\infty\frac{du}{u^2+1-\gamma}$$

wenn $uy=\sqrt{1+\gamma y^2}$, $u_0=\sqrt{\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta(1+\alpha)}}$ gesetzt und daher

$$=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(1+\beta)}}.$$

Damit erlangt man schliesslich etwas schönes Resultat

$$J=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha}}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha(1+\beta)}}\right].$$

Tatsächlich sind $\alpha=3\tau^2/2-1$, $\beta=(3\tau^2-2)/5\tau^2$, wobei τ ein im Intervalle $\sqrt{2/3}<\tau<2$ verlaufenden Parameter darstellt. Somit bestehen $0<\alpha<5$, $0<\beta<1/2$, $\beta/\alpha=2/5\tau^2$, $\delta=3/5$, also genügen sie alle vorgegebenen Voraussetzungen. Obgleich bei $\tau=\sqrt{2/3}$ der obige Ausdruck J ersichtlich eine unbestimmte Form 0/0 darbietet, jedoch strebt seiner Grenzwert für $\tau\to\sqrt{2/3}$ zur Null, was mit seiner statistischen Meinung stimmt.

Dagegen aber konnte der Verfasser bedauerlich irgendeinen gleichartigen Ausdruck für ein nur wenig verschiedenes Integral

$$K=\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{1/3+\alpha(1-\zeta^2)}}{1+\beta\zeta^2}d\zeta$$

mit

$$0<\alpha=2(2\tau^2-3)/15\tau^2<1/6,\quad 0<\beta=2\tau^2/3-1<5/3\quad\text{bei}\quad\sqrt{3/2}<\tau<2$$

im allgemeinen nicht ermitteln.

In der Tat, nach zweimaligen Teilintegrationen erhält man

$$K=\frac{\pi}{6}\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{\gamma}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}(\gamma-z^2)}\;\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\gamma^{n+1}A_{n+1},$$

wobei $\gamma=\frac{1}{3}+\alpha$, $z=\sqrt{\gamma-\alpha\zeta^2}$ und

$$A_{n+1}=\int_0^{y_1}\frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}(1+\delta y^2)}\,(yz=\sqrt{\gamma-z^2},\ y_1=\sqrt{3\alpha}<1/\sqrt{2},\ \delta=1+\beta\gamma/\alpha=3\tau^2/2),$$

was eine Recursionsformel

$$A_{n+1}=\frac{1}{\varepsilon}A_n-\frac{1}{\delta-1}B_{n+1}\quad\left(\varepsilon=\frac{\delta-1}{\delta},\ B_{n+1}=\int_0^{y_1}\frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}\right)$$

besitzt, und woraus

$$A_{n+1}=\frac{A_0}{\varepsilon^{n+1}}-\frac{\alpha}{\beta\gamma}\sum_{m=0}^{n}\frac{B_{m+1}}{\varepsilon^{n-m}}\quad\left(A_0=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\operatorname{arctg}\sqrt{3\alpha\delta},\ \alpha\delta=\frac{1}{5}(2\tau^2-3)<1\right)$$

folgt. Daher liefert das erste Glied schon den Teilwert von K

$$K_1=\frac{A_0}{\sqrt{\alpha}}\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\eta^{n+1}=\frac{\eta}{\sqrt{\alpha\delta}}\operatorname{arctg}\sqrt{3\alpha\delta}\ \operatorname{arctg}\eta$$

mit $\eta=\gamma/\varepsilon=\alpha/\beta+\gamma=3/5=0.6$. Jedoch bleibt noch für die zweite Summation lediglich eine verwickelte Summe

$$K_2=\frac{-\sqrt{\alpha}}{\beta}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^n\sum_{m=0}^n B_{m+1}\varepsilon^m,$$

worin die innere Summation

$$\sum_{m=0}^n B_{m+1}\varepsilon^m=\sum_0^n\int_0^{y_1}\frac{\varepsilon^m dy}{(1+y^2)^{m+1}}=\sum_0^n\varepsilon^m\int_0^b\cos^{2m}x\,dx\,(y=\tan x,\ b=\operatorname{arctg}y_1=\operatorname{arctg}\sqrt{3\alpha})$$

$$=\sum_{m=0}^n\varepsilon^m\left[\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots(2m-2\nu+1)}{2m(2m-2)\cdots(2m-2\nu)}\cos^{2m-2\nu-1}b\sin b\right.$$

$$\left.+\frac{(2m-1)(2m-3)\cdots1}{2m(2m-2)\cdots2}b\right]$$

gilt, deren Gestalt aber fast unverbesserlich zu sein scheint.

Da für $\tau\to\sqrt{3/2}$, $\alpha\to0$, $\beta\to0$, $K\to\pi/6$ und $K_1\to0.6\sqrt{3}$ arctg $0.6=0.29424\pi$ lauten, so muss alsdann K_2 gegen 0.12757π streben.