Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. X, 1959

EINE INTEGRALFORMEL

Von

Yoshikatsu WATANABE

(Eingegangen am 30 September 1959)

Der Verfasser sich bemühte um eine kleine Identität

$$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\, \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{96} = 0.102808\ldots,$$

die zwar nach einem statistischen Problem[1] gewiß bestehen soll, und tatsächlich nach der Gaußschen Methode numerischer Integration gesichert worden ist, formal zu prüfen. Obgleich es selbst trivial ist, jedoch mag die Denkensart als eine elementare Aufgabe zur Funktionentheorie für Studenten lehrreich dienen.

Wird das Integral teilweise integriert, so ergibt sich

$$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\, \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi^2}{18} - \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(3x^2-1)\sqrt{x^2-1}},$$

was wieder andere Arkstangensfunktion enthält. Beachtet man aber den letzten Integrand ins Komplexe, so ist die Funktion

$$f(z) = \operatorname{arctg}\ z/(3z^2-1)\sqrt{z^2-1}$$

eindeutig sogar regulär im Bereich B welcher von der halbkreisförmigen Kontur C wie in der Fig. 1 begrenzt wird. Wird der Einfachheit halber das Integral

$$J = \int_1^{\infty} f(x)\, dx$$

betrachtet, so kommt nach Cauchy

$$0 = \oint_C f(z)\, dz = (1) + (2) + (3) + \ldots\ldots + (15),$$

wobei die Nummern (1), (2), (3), ..., die längs jedem gleichlautenden Teilweg mit Pfilen in der Fig. 1 erstreckten Teilintegrale bedeuten.

Es seien arc $(z \mp 1) = 0$ auf Weg 1, und demnach bestehen für Teilintegrale

$$(1) = \lim_{\rho\to 0,\ R\to\infty} \int_{1+\rho}^{R} f(x)\, dx = J = (7),$$

aber $(9)+(14)=0$ sowie $(11)+(12)=0$ wegen je entgegengesetztes Vorzeichn.

Ferner stellt das sich in der längs die Imaginäreachse zwischen $(i,\ \infty i)$ sowie $(-i,\ -\infty i)$ gesperrten Zahlenebene E, bei $z = re^{i\theta}$

1) Y. Watanabe, Some exceptional examples to Student's distribution, gegenwärtiges Journ. S. 27, Fußnote.

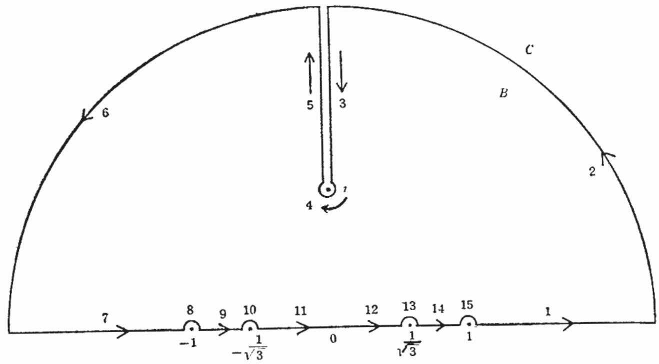

Fig. 1

$$\operatorname{arctg} z = \int_0^z \frac{dw}{1+w^2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{r-\sin\theta}{\cos\theta} + \operatorname{arctg}\frac{r+\sin\theta}{\cos\theta}\right] + \frac{i}{4}\log\left|\frac{r^2+2r\sin\theta+1}{r^2-2r\sin\theta+1}\right|$$

dar, und also ist arctg z eindeutig und überhaupt regulär in E, außer daß es nur für $r^2 \pm 2r \sin\theta + 1 \to 0$ ($d.\ h.\ z \to \pm i$), logarithmisch unendlich wird. Wenn die Radien der kleinen und großen Kreise im Integrationsweg $\rho \to 0$, $R \to \infty$ streben, so werden ersichtlich

$$(2) = (6) = O(R^{-2}),\quad (8) = (15) = O(\rho^{\frac{1}{2}}) \text{ und } (4) = O(\rho \log \rho).$$

Daher verschwinden alle diese Teilintegrale sämtlich bei $\rho \to 0$, $R \to \infty$.

Da aber die Faktoren arctg z in Integrande von (3) und (5) dieselben Imaginäreteile aber verschiedenen Reelleteil $\pm \pi/2$ bzw. besitzen, so betragen beide Teilintegrale (3) und (5) zusammen

$$-\pi\int_1^\infty \frac{dyi}{-(3y^2+1)\sqrt{y^2+1}\, e^{\pi i/2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(3-2\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Endlich gilt für (13), das Integral um den Pol $z = 1/\sqrt{3}$, asymptotisch

$$\int_\pi^0 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\rho e^{i\theta}\, i d\theta \Big/ 3\rho e^{i\theta}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{\frac{2}{3}}\, e^{\pi i/2} = -\frac{\pi^2}{12\sqrt{2}}$$

und ganz ebenso für (10). Also schlüßt man

$$2J + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{6\sqrt{2}} = 0,$$

uud daraus

$$J = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] = 0.392766\ \ldots\ .$$

Man soll noch das Integral $\int_{\sqrt{3}}^\infty f(x)\,dx$ versuchen, was getan wird, falls wir das allgemeinere Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx\ (a>1)$ ausfinden können. Für diese Leistung braucht man den Radius vom großen Halbkreis $R=a$ endlich und fest zu erhalten anstatt ∞ zu machen. Das neue über diesen Halbkreis erstreckte Integral ist wirklich gleich

$$\Re 2\int_0^{\pi/2} f(Re^{i\theta})\,Re^{i\theta}\,id\theta.$$

Oder, sonst, kann man den Halbkreis als Integrationsweg durch zwei aufwärts gezogene Lote $x=\pm\sqrt{3}$ mit entgegengesetzten Richtungen ersetzen. Jedoch werden diese fuuktionentheoretischen Abschätzungen etwas beschwerlich und weitere Untersuchungen sind als Aufgaben für Studenten übergelassen.