Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. IX. 1958

ZUR LAPLACESCHEN ASYMPTOTISCHEN FORMEL

Von

Yoshikatsu WATANABE und Yoshihiro ICHIJÔ

(Eingegangen am 30. Sept. 1958)

Einer der Verfässer hat bereits die Laplacesche asymptotische Formel für das Integral von Potenz mit großem Indexe, wenn die Basisfunktion im Innern des Integrationsbereiches maximal wird, zum Falle mehrer Variablen erweitert und vielmehr daraus denjenigen einer Variable bewiesen[1]. Da aber bisweilen das Maximum am Rande auftritt, diesmal wollen wir zunächst solchen besonderen Fällen betrachten und sondern woraus den üblichen Fall herleiten.

§ **1.** Die Einfachheit wegen beschränken wir uns auf einer reellen Variable. Wir auflösen die

Aufgabe 1. *Die reellen Funktionen* $\varphi(x)$ *und* $f(x)$ *seien im Intervalle* $I: a\leqq x<b$, *wobei* a *endlich aber* b *entweder endlich oder unendlich sein möge, definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen*:

1° *Die Funktionen* $\varphi(x)[f(x)]^n$ *für* $n=0, 1, 2, \cdots$ *oder wenigstens für alle* $n\geqq$ *passend großes* $m(>0)$ *seien absolut integrabel in* I.

2° *Die Funktion* $f(x)$ *sei nicht negativ und* $F(x)=\log f(x)$ *erreiche am unteren Randpunkte* a *ihr Maximum und zwar sei die obere Grenz von* $F(x)$ *in jedem abgeschlossenen Intervall, das* a *nicht enthält, kleiner als* $F(a)$ $(=F(a+0)$ *streng ausgesprochen). Ferner sei* $F(x)$ *im Intervalle* $U: a\leqq x<a+\delta$ *stetig differenzierbar bis zu einer passenden Ordnung.*

3° *Auch existiere etwa* $\varphi^{(4)}(x)$ *in* U *und sei es dort stetig.*

Man suche die asymptotische Formel für das Integral

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx = \int_a^b \varphi(x) \exp[nF(x)]dx \qquad \text{bei } n\to\infty\,. \tag{1. 1}$$

Lösung. Betrachtet man einen rechts offenen innerhalb I liegenden kleinen Intervall $U: a\leqq x<a+\delta$, so erreicht die Funktion $F(x)-F(a)$ wegen 2° im abgeschlossenen Intervall $I-U$ ein Maximum (<0) und folglich dort $\exp\{F(x)-F(a)\}$ auch einen Maximalwert ρ, wo $0<\rho<1$ ist. Setzt man

$$\int_a^b \varphi(x) \exp\{n[F(x)-F(a)]\}\, dx = \int_a^{a+\delta} + \int_{a+\delta}^b = (\text{i})+(\text{ii})\,, \tag{1. 2}$$

1) Y. Ichijô, Über die Laplacesche asymptotische Formel für das Integral von Potenz mit großem Indexe, dieses Journ., Vol. VI (1955), S. 63. Auch vgl. G. Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I, SS. 78, 244.

so erhält man nach 1°

$$|\text{(ii)}| < \rho^n \int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)|\,dx = O(\rho^n) = 0\left(\frac{1}{n^\omega}\right)$$

bei genügend großes n, wieviel groß aber fest ω genommen werden mag[2]. Daher hat man (i) allein zu abschätzen. Dazu schreibe man nach 3° im beschränkten Intervalle $U: a \leqq x < a+\delta$ etwa

$$\text{(1. 3)} \quad \varphi(x) = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\varphi^{(\mu)}(a)}{\mu!}(x-a)^\mu + R, \quad \text{mit}\,|R| = \frac{1}{4!}|\varphi^{(4)}(a+(x-a)\vartheta)|\,(x-a)^4 < M\delta^4 .$$

Ebenso auch wegen 2° hat man in demselben Intervalle eine Taylorsche Entwickelung

$$\text{(1. 4)} \qquad F(x) - F(a) = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{F^{(h+\nu)}(a)}{\underline{|h+\nu}}(x-a)^{h+\nu} + R_1 ,$$

wobei $F^{(h)}(a) \neq 0$ mit $h \geqq 1$, $R_1 = F^{(h+4)}(a+(x-a)\vartheta_1)(x-a)^{h+4}/\underline{|h+4}$ und $|R_1| < M\delta^{h+4}$ sind. Da aber $F(x)$ am Randpunkt a maximal wird, so muß $F^{(h)}(a)(x-a)^h/h! < 0$ für genug kleines $x-a$ (>0) und demnach

$$\text{(1. 5)} \qquad F^{(h)}(a) < 0$$

sein. Setzt man der Kürze halber

$$\text{(1. 6)} \qquad A = \left[\frac{F^{(h)}(a)}{-h!}\right]^{1/h}, \quad An^{1/h} = N, \quad x-a = \frac{u}{N},$$

$$A_\nu = \frac{F^{(h+\nu)}(a)}{\underline{|h+\nu}} \Big/ \frac{F^{(h)}(a)}{-\underline{|h}}, \quad A_0 = -1,$$

und folglich

$$\frac{nF^{(h+\nu)}(a)}{\underline{|h+\nu}}\left(\frac{u}{N}\right)^{h+\nu} = A_\nu \frac{u^{h+\nu}}{N^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

so ergibt sich

$$\text{(i)} = \int_0^{N\delta}\left[\varphi(a) + \varphi'(a)\frac{u}{N} + \frac{\varphi''(a)}{2}\left(\frac{u}{N}\right)^2 + \frac{\varphi'''(a)}{6}\left(\frac{u}{N}\right)^3 + \frac{\varphi''''(\xi)}{\underline{|4}}\left(\frac{u}{N}\right)^4\right]$$
$$\times \exp\left[-u^h + A_1 u^h \frac{u}{N} + A_2 u^h\left(\frac{u}{N}\right)^2 + A_3 u^h\left(\frac{u}{N}\right)^3 + A_4(\xi_1)\,u^h\left(\frac{u}{N}\right)^4\right]\frac{du}{N}.$$

Werden nochmals

$$\text{(1. 7)} \qquad u^h = v, \quad \frac{u}{N} = \frac{1}{A}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/h}, \quad \frac{du}{N} = \frac{1}{hA}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/h}\frac{dv}{v}$$

geschrieben, so gilt für $n \to \infty$

---

2) Falls $\varphi(x)f(x)^n$ nicht für $n=0$, aber nur für $n \geqq$ passend großes $m > 0$, absolut integrabel in I ist, so betrachten wir wie folgt: $|\text{(ii)}| < \frac{\rho^{n-m}}{f(a)^m}\int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)f(x)^m|\,dx = O(\rho^{n-m}) = O\left(\frac{1}{n^\omega}\right)$ bei genügend großes n.

$$(1.8)\quad \text{(i)} \cong \int_0^\infty \left[\varphi(a)+\frac{\varphi'(a)}{A}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/h}+\frac{\varphi''(a)}{2A^2}\left(\frac{v}{n}\right)^{2/h}+\frac{\varphi'''(a)}{6A^3}\left(\frac{v}{n}\right)^{3/h}+\frac{\varphi''''(\xi)}{24A^4}\left(\frac{v}{n}\right)^{4/h}\right]$$
$$\times e^{-v}\prod_{\nu=1}^{3}\exp\left\{\frac{A_\nu}{A^\nu}v\left(\frac{v}{n}\right)^{\nu/h}\right\}\cdot\exp\left\{\frac{A_4(\xi_1)}{A^4}v\left(\frac{v}{n}\right)^{4/h}\right\}\frac{1}{hA}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/h}\frac{dv}{v}.$$

Man entwickle jedes $\exp\left\{\frac{A_\nu}{A^\nu}v\left(\frac{v}{n}\right)^{\nu/h}\right\}$ nach den Potenzen von $\left(\frac{v}{n}\right)^{1/h}$ bis zu den Gliedern vierter Ordnung. Wird die Multiplikation ausgeführt und die Formel der Gammafunktion

$$\int_0^\infty e^{-v}v^{\nu/h+\lambda}dv=\Gamma\left(\frac{\nu}{h}+\lambda+1\right)$$

angewandt, so liefert es, als gesuchte asymptotische Formel, die folgende

$$(1.9)\quad \int_a^b\varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \cong \frac{\exp[nF(a)]}{A}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/h}\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{h}\right)\varphi(a)\right.$$
$$+\Gamma\left(1+\frac{2}{h}\right)\left[\frac{\varphi'(a)}{2}+\frac{\varphi(a)A_1}{h}\right]\frac{1}{A}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/h}+\Gamma\left(1+\frac{3}{h}\right)\left[\frac{\varphi''(a)}{6}+\frac{\varphi'(a)}{h}A_1\right.$$
$$\left.+\varphi(a)\left(\left(1+\frac{3}{h}\right)\frac{A_1^2}{2h}+\frac{A_2}{h}\right)\right]\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2/h}$$
$$+\Gamma\left(1+\frac{4}{h}\right)\left[\frac{\varphi'''(a)}{24}+\frac{\varphi''(a)}{2h}A_1+\varphi'(a)\left(\left(1+\frac{4}{h}\right)\frac{1}{2h}A_1^2+\frac{1}{h}A_2\right)\right.$$
$$\left.\left.+\varphi(a)\left(\left(2+\frac{4}{h}\right)\left(1+\frac{4}{h}\right)\frac{A_1^3}{6h}+\left(1+\frac{4}{h}\right)\frac{A_1A_2}{h}+\frac{A_3}{h}\right)\right]\frac{1}{A^3}\left(\frac{1}{n}\right)^{3/h}+O\left(\frac{1}{n}\right)^{4/h}\right\}.$$

Oder, noch ausführlich geschrieben,

$$(1.10)\quad \int_a^b\varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \cong \frac{\exp[nF(a)]}{(-nF^{(h)}(a)/\underline{|h})^{1/h}}\left\{\Gamma\left(1+\frac{1}{h}\right)\varphi(a)\right.$$
$$+\frac{\Gamma(1+2/h)}{(-nF^{(h)}(a)/\underline{|h})^{1/h}}\left[\frac{\varphi'(a)}{2}-\frac{\varphi(a)}{h(h+1)}\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right]$$
$$+\frac{\Gamma(1+3/h)}{(-nF^{(h)}(a)/\underline{|h})^{2/h}}\left[\frac{\varphi''(a)}{6}-\frac{\varphi'(a)}{h(h+1)}\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi(a)}{h(h+1)}\left(\frac{h+3}{2h(h+1)}\left(\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right)^2-\frac{F^{(h+2)}(a)}{(h+2)F^{(h)}(a)}\right)\right]$$
$$+\frac{\Gamma(1+4/h)}{(-nF^{(h)}(a)/\underline{|h})^{3/h}}\left[\frac{\varphi'''(a)}{24}-\frac{\varphi''(a)}{2h(h+1)}\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right.$$
$$+\frac{\varphi'(a)}{h(h+1)}\left(\frac{h+4}{2h(h+1)}\left(\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right)^2-\frac{F^{(h+2)}(a)}{(h+2)F^{(h)}(a)}\right)$$
$$-\frac{\varphi(a)}{h(h+1)}\left(\frac{(h+2)(h+4)}{3h^2(h+1)^2}\left(\frac{F^{(h+1)}(a)}{F^{(h)}(a)}\right)^3-\frac{h+4}{h(h+1)(h+2)}\frac{F^{(h+1)}(a)F^{(h+2)}(a)}{F^{(h)}(a)^2}\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{F^{(h+3)}(a)}{(h+2)(h+3)F^{(h)}(a)}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)^{4/h}\right\},$$

wobei jeder Quotient in den äußersten geschweiften Klammern sämtlich nulldimensional in bezug auf Ordnungszahlen des Derivatives, d.h. der Ausdruck zwischen geschweiften Klammern zwar homogen vom Grade Null inbezugauf diese Zahlen ist.

Ins besondere für $h=1$ erhält man

$$(1.11)\quad \int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(a)]}{-nF'(a)}\Big\{\varphi(a)-\frac{1}{nF'(a)}\Big[\varphi'(a)-\varphi(a)\frac{F''(a)}{F'(a)}\Big]$$
$$+\frac{1}{n^2F'(a)^2}\Big[\varphi''(a)-\frac{3\varphi'(a)F''(a)}{F'(h)}+\varphi(a)\Big(\frac{3F''(a)^2}{F'(a)^2}-\frac{F'''(a)}{F'(a)}\Big)$$
$$-\frac{1}{n^3F'(a)^3}\Big[\varphi'''(a)-6\varphi''(a)\frac{F''(a)}{F'(a)}+\varphi'(a)\Big(\frac{15F''(a)^2}{F'(a)^2}-\frac{4F'''(a)}{F'(a)}\Big)$$
$$-\varphi(a)\Big(\frac{15F''(a)^3}{F'(a)^3}-\frac{10F''(a)F'''(a)}{F'(a)^2}+\frac{F''''(a)}{F'(a)}\Big)\Big]+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big\},$$

so wie für $h=2$,

$$(1.12)\quad \int_a^b \varphi(x)\exp\{nF(x)\}\,dx \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2\pi}{nF''(a)}}\exp\{nF(a)\}\Big\{\varphi(a)+\sqrt{\frac{-2}{n\pi F''(a)}}\Big[\varphi'(a)$$
$$-\frac{\varphi(a)}{3}\frac{F'''(a)}{F''(a)}\Big]+\frac{1}{-2nF''(a)}\Big[\varphi''(a)-\varphi'(a)\frac{F'''(a)}{F''(a)}+\frac{\varphi(a)}{4}\Big(\frac{5}{3}\frac{F'''(a)^2}{F''(a)^2}-\frac{F''''(a)}{F''(a)}\Big)\Big]$$
$$+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{-nF''(a)}^3}\Big[\varphi'''(a)-2\varphi''(a)\frac{F'''(a)}{F''(a)}+\varphi'(a)\Big(2\frac{F'''(a)^2}{F''(a)^2}-\frac{F''''(a)}{F''(a)}\Big)$$
$$-\varphi(a)\Big(\frac{8}{9}\frac{F'''(a)^3}{F''(a)^3}-\frac{F'''(a)F''''(a)}{F''(a)^2}+\frac{F'''''(a)}{5F''(a)}\Big)\Big]+O\Big(\frac{1}{n}\Big)^2\Big\}.$$

§**2.** In Analogie zum vorigen Abschnitt kann man betrachten die

Aufgabe 2. *Die Funktionen* $\varphi(x)$ *und* $f(x)(\geqq 0)$ *seien im Intervalle* $I: a<x\leqq b$, *definiert, wobei* b *endlich aber* a *entweder endlich oder unendlich sein möge, und den folgenden Bedingungen unterworfen:*

1° *Die Funktion* $\varphi(x)[f(x)]^n$ *für* $n=0, 1, 2, \cdots$ *oder sonst für alle* $n\geqq$ *passend großes* $m(>0)$ *seien absolut integrabel in* I.

2° *Die Funktion* $f(x)$ *sei nicht negativ und* $F(x)=\log f(x)$ *erreiche ihr Maximum am oberen Randpunkt* b *und zwar sei die obere Grenz von* $F(x)$ *in jedem abgeschlossenen Intervalle, das* b *nicht enthält, kleiner als* $F(b)$. *Ferner sei* $F(x)$ *im Intervalle* $U: b\geqq x>b-\varepsilon$ *stetig derivable bis zu passender Ordnung.*

3° *Auch existiere stwa* $\varphi^{(4)}(x)$ *in* U *und sei es dort stetig.*

Man suche die asymptotische Formel für das Integral

$$(2.1)\qquad \int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx=\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx.$$

Lösung. Setzt man ganz analog wie in §1

$$(2.2)\qquad \int_a^b \varphi(x)\exp\{n[F(x)-F(b)]\}\,dx=\int_a^{b-\delta}+\int_{b-\delta}^b=(\mathrm{i})+(\mathrm{ii}),$$

so braucht es nun (ii) allein zu abschätzen. Wieder nach Voraussetzungen gelten die folgenden Entwickelungen im beschränkten Intervalle $U: b \geqq x \geqq b-\delta$

$$\varphi(x) = \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\varphi^{(\mu)}(b)}{\mu!}(x-b)^{\mu} + R \qquad \text{mit } |R| < M\delta^4 \text{ so wie} \tag{2.3}$$

$$F(x) = F(b) + \sum_{\nu=0}^{3} \frac{F^{(k+\nu)}(b)}{\underline{|k+\nu}}(x-b)^{k+\nu} + R_1 \qquad \text{mit } |R_1| < M\delta^{k+4}, \tag{2.4}$$

wo $k \geqq 1$ ist. Da aber $F(x)$ an $x=b$ maximal wird, so soll

$$\frac{F^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k < 0$$

sein, und wegen $x-b<0$

$$(-1)^{k-1} F^{(k)}(b) > 0\,. \tag{2.5}$$

Setzt man ferner

$$B = \left(\frac{F^{(k)}(b)}{(-1)^{k-1}\underline{|k}}\right)^{1/k}, \quad Bn^{1/k} = N, \quad x-b = -\frac{u}{N}, \qquad (\text{so daß } u>0) \tag{2.6}$$

$$B_\nu = \frac{F^{(k+\nu)}(b)}{\underline{|k+\nu}} \Big/ \frac{F^{(k)}(b)}{(-1)^{k-1}\underline{|k}}, \quad B_0 = (-1)^{k-1},$$

und folglich

$$\frac{nF^{(k+\nu)}(b)}{\underline{|k+\nu}}\left(\frac{-u}{N}\right)^{k+\nu} = B_\nu \frac{(-u)^{k+\nu}}{N^\nu},$$

so erhält man

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \simeq \int_0^{N\delta} & \left[\varphi(b) - \varphi'(b)\frac{u}{N} + \frac{\varphi''(b)}{2}\left(\frac{u}{N}\right)^2 - \frac{\varphi'''(b)}{6}\left(\frac{u}{N}\right)^3 + \frac{\varphi''''(\xi)}{24}\left(\frac{u}{N}\right)^4\right] \\ & \times \exp\left[-u^k - B_1(-u)^k\frac{u}{N} + B_2(-u)^k\left(\frac{u}{N}\right)^2 - B_3(-u)^k\left(\frac{u}{N}\right)^3 + B_4(\xi_1)(-u)^k\left(\frac{u}{N}\right)^4\right]\frac{du}{N}.\end{aligned}$$

Schreibt man schließlich

$$u^k = v, \quad \frac{u}{N} = \frac{1}{B}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/k}, \quad \frac{du}{N} = \frac{1}{kB}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/k}\frac{dv}{v}, \tag{2.7}$$

so gilt für $n \to \infty$

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \simeq \int_0^{\infty} & \left[\varphi(b) - \frac{\varphi'(b)}{B}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/k} + \frac{\varphi''(b)}{2B^2}\left(\frac{v}{n}\right)^{2/k} - \frac{\varphi'''(b)}{6B^3}\left(\frac{v}{n}\right)^{3/k} - \frac{\varphi''''(\xi)}{24B^4}\left(\frac{v}{n}\right)^{4/k}\right] \\ & \times e^{-v} \prod_{\nu=1}^{3} \exp\left\{(-1)^{k+\nu}\frac{B_\nu}{B^\nu} v\left(\frac{v}{n}\right)^{\nu/k}\right\} \exp\left\{(-1)^k \frac{B_4(\xi_1)}{B^4} v\left(\frac{v}{n}\right)^{4/k}\right\} \frac{1}{kB}\left(\frac{v}{n}\right)^{1/k}\frac{dv}{v}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Wie vom Vergleiche der beiden Ausdrücke (1.8) und (2.8) ersichtbar ist, ergibt sich der letztere aus dem vorigen dadurch, daß man A^ν als Koeffizient im Integrande, und A_ν mit $(-B)^\nu$ und $(-1)^k B_\nu$ bzw. vertauscht. Also besteht es parallel mit (1.9)

$$(2.9)\quad \int_a^b \varphi(x)\exp\{nF(x)\}\,dx \simeq \frac{\exp[nF(b)}{B}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/k}\Big\{\Gamma\Big(1+\frac{1}{k}\Big)\varphi(b)$$
$$-\frac{\Gamma(1+2/k)}{B}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/k}\Big[\frac{\varphi'(a)}{2}+\varphi(b)\frac{(-1)^k}{k}B_1\Big]$$
$$+\frac{\Gamma(1+3/k)}{B^2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2/k}\Big[\frac{\varphi''(b)}{6}+\varphi'(b)\frac{(-1)^k}{k}B_1+\varphi(b)\Big(\Big(1+\frac{3}{k}\Big)\frac{B_1^2}{2k}+(-1)^k\frac{B_2}{k}\Big)\Big]$$
$$-\frac{\Gamma(1+4/k)}{B^3}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{3/k}\Big[\frac{\varphi'''(b)}{24}+\frac{\varphi''(b)}{2k}(-1)^kB_1$$
$$+\varphi'(b)\Big(\Big(1+\frac{4}{k}\Big)\frac{1}{2k}B_1^2+\frac{(-1)^k}{k}B_2\Big)+\varphi(b)\Big(\Big(2+\frac{4}{k}\Big)\Big(1+\frac{4}{k}\Big)\frac{(-1)^4B_1^3}{6k}$$
$$+\Big(1+\frac{4}{k}\Big)\frac{1}{k}B_1B_2+\frac{(-1)^k}{k}B_3\Big)\Big]+O\Big(\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4/k}\Big)\Big\}.$$

Es ist besonders für $k=1$

$$(2.10)\quad \int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(b)]}{nF'(b)}\Big\{\varphi(b)-\frac{1}{nF'(b)}\Big[\varphi'(b)-\frac{\varphi(b)F''(b)}{F'(b)}\Big]$$
$$+\frac{1}{n^2F'(b)^2}\Big[\varphi''(b)-3\varphi'(b)\frac{F''(b)}{F'(b)}+\varphi(b)\Big(\frac{3F''(b)^2}{F'(b)^2}-\frac{F'''(b)}{F'(b)}\Big)\Big]$$
$$-\frac{1}{n^3F'(b)^3}\Big[\varphi'''(b)-6\varphi''(b)\frac{F''(b)}{F'(b)}+\varphi'(b)\Big(\frac{15F''(b)^2}{F'(b)^2}-\frac{4F'''(b)}{F'(b)}\Big)$$
$$-\varphi(b)\Big(\frac{15F''(b)^3}{F'(b)^3}-\frac{10F''(b)F'''(b)}{F'(b)^2}+\frac{F''''(b)}{F'(b)}\Big)\Big]+O\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big\},$$

worin der Ausdruck zwischen äußersten geschweiften Klammern zwar ganz dieselbe Gestalt wie (1. 11) hat, außer daß a durch b ersetzt und das Zeichen sämtlichen Faktors verändert ist.

Auch für $k=2$ gilt

$$(2.11)\quad \int_a^b \varphi(x)\exp\{nF(x)\}\,dx \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-2\pi}{nF''(b)}}\exp[nF(b)]\Big\{\varphi(b)-\sqrt{\frac{-2}{n\pi F''(b)}}\Big[\varphi'(b)$$
$$-\frac{\varphi(b)}{3}\frac{F'''(b)}{F''(b)}\Big]+\frac{1}{-2nF''(b)}\Big[\varphi''(b)-\varphi'(b)\frac{F'''(b)}{F''(b)}+\frac{\varphi(b)}{4}\Big(\frac{5}{3}\frac{F'''(b)^2}{F''(b)^2}-\frac{F''''(b)}{F''(b)}\Big)\Big]$$
$$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{-nF''(b)}^3}\Big[\varphi'''(b)-2\varphi''(b)\frac{F'''(b)}{F''(b)}+\varphi'(b)\Big(\frac{2F'''(b)^2}{F''(b)^2}-\frac{F''''(b)}{F''(a)}\Big)$$
$$-\varphi(b)\Big(\frac{8}{9}\frac{F'''(b)^3}{F''(b)^3}-\frac{F'''(b)F''''(b)}{F''(b)^2}+\frac{1}{5}\frac{F'''''(b)}{F''(b)}\Big)\Big]+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big\},$$

was auch ganz dieselbe Gestalt wie (1. 12) hat, außer daß dortige a durch b ersetzt werden und weiter die Zeichen der Glieder mit eckigen Klammern jetzt wechselweise veränderen.

§ **3.** Zusammengelaßen die im vorigen Abschnitte gelösten zwei Aufgaben, haben wir die

Aufgabe 3. *Die reellen Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ $(\geqq 0)$ seien im endlichen oder unendlichen Intervalle $I: a<x<b$ definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen:*

1° *Die Funktionen $\varphi(x)[f(x)]^n$ für $n=0, 1, 2, \cdots$ oder sonst für alle $n \geqq$ passend großes $m(>0)$ seien absolut integrabel in I.*

2° *Die Fnnktion $f(x)$ sei nicht negativ und $F(x)=\log f(x)$ erreiche am inneren Punkt $x=c$ ihr Maximum und zwar sei die obere Grenz von $F(x)$ in jedem abgeschlossenen Intervalle, das c uicht enthält, kleiner als $F(c)$. Ferner sei $F(x)$ in jenen nachbarstehenden Unterintervalle $U: c-\varepsilon<x<c$ und $V: c<x<c+\varepsilon'$ stetig differenzierbar bis zu passender Ordnung, aber möglicherweise $F^{(\nu)}(c-0) \neq F^{(\nu)}(c+0)$.*

3° *Auch existiere $\varphi^{(4)}(x)$ schlechthin[3] in $U \cup V=W$ und dort sei sogar stetig. Man suche die asymptotische Formel für das Integral*

$$\int_a^b \varphi(x)[f(x)]^n dx=\int_a^b \varphi(x) \exp[nF(x)] dx \qquad \text{bei } n \to \infty . \tag{3.1}$$

Nach (1.9) und (2.9) können wir sofort die Lösung erhalten, wie folgt: Zunächst seien

$$F'(c+0)=\cdots=F^{(h-1)}(c+0)=0^{4)} \text{ aber } F^{(h)}(c+0)<0$$
$$F'(c-0)=\cdots=F^{(k-1)}(c-0)=0 \quad \text{aber } (-1)^{k-1} F^{(k)}(c-0)>0 ,$$

somit sind die rechtseitigen und linkseitigen Koeffizienten

$$\begin{cases} R=\left(\dfrac{F^{(h)}(c+0)}{-\underline{|h}}\right)^{1/h}, \quad R_\nu=\dfrac{F^{(h+\nu)}(c+0)}{\underline{|h+\nu}} \Big/ \dfrac{F^{(h)}(c+0)}{-\underline{|h}}, \\ L=\left(\dfrac{F^{(k)}(c-0)}{(-1)^{k-1}\underline{|k}}\right)^{1/k}, \quad L_\nu=\dfrac{F^{(k+\nu)}(c-0)}{\underline{|k+\nu}} \Big/ \dfrac{F^{(k)}(c-0)}{(-1)^{k-1}\underline{|k}} \end{cases} \quad \text{bzw.} \tag{3.2}$$

Womit ist die Lösung folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]dx \simeq \frac{\exp[nF(c+0)]}{R}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/h}\Big\{\Gamma\left(1+\frac{1}{h}\right)\varphi(c) \\ +\frac{\Gamma(1+2/h)}{R}\left[\frac{\varphi'(c)}{2}+\frac{R_1}{h}\varphi(c)\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{1/h} \\ +\frac{\Gamma(1+3/h)}{R^2}\left[\frac{\varphi''(c)}{6}+\frac{\varphi'(c)}{h}R_1+\frac{\varphi(c)}{h}\left(\frac{h+3}{2h}R_1^2+R_2\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{2/h} \\ +\frac{\Gamma(1+4/h)}{R^3}\left[\frac{\varphi'''(c)}{24}+\frac{\varphi''(c)}{2h}R_1+\frac{\varphi'(c)}{h}\left(\frac{h+4}{2h}R_1^2+R_2\right)\right. \\ \left.+\frac{\varphi(c)}{h}\left(\frac{(h+2)(h+4)}{3h^2}R_1^3+\frac{h+4}{h}R_1R_2+R_3\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{3/h}+O\left(\frac{1}{n}\right)^{4/h}\Big\} \\ +\frac{\exp[nF(c-0)]}{L}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/k}\Big\{\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)\varphi(c)-\frac{\Gamma(1+2/k)}{L}\left[\frac{\varphi'(c)}{2}+\frac{(-1)^k}{k}L_1\varphi(c)\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{1/k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

---

3) Dies ist etwas Einfachheit wegen vorausgesetzt worden.

4) Sonst $h=1$ wenn $F'(c+0)<0$; oder $k=1$, wenn $F'(c-0)>0$.

$$+\frac{\Gamma(1+3/k)}{L^2}\Big[\frac{\varphi''(c)}{6}+\frac{\varphi'(c)}{k}(-1)^k L_1+\frac{\varphi(c)}{k}\Big(\frac{k+3}{2}L_1^2+(-1)^k L_2\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2/k}$$

$$-\frac{\Gamma(1+4/k)}{L^3}\Big[\frac{\varphi'''(c)}{24}+\frac{\varphi''(c)}{2k}(-1)^k L_1+\frac{\varphi'(c)}{k}\Big(\frac{k+4}{2k}L_1^2+(-1)^k L_2\Big)$$

$$+\frac{\varphi(c)}{k}\Big(\frac{(-1)^k(k+2)(k+4)}{3k^2}L_1^3+\frac{k+4}{k}L_1L_2+(-1)^k L_3\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{3/k}+O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4/k}\Big\}.$$

Im Falle, daß die Funktion $F(x)$ in bezug auf dem Punkte $x=c$ *symmetrisch* sich verfährt, gelten

$$h=k=l \quad \text{und sogar} \quad F^{(\nu)}(c-0)=(-1)^\nu F^{(\nu)}(c+0). \tag{3.4}$$

Überdies ist nach Voraussetzung

$$-F^{(h)}(c+0)>0 \tag{3.5}$$

und hieraus von selbst auch

$$(-1)^{l-1}F^{(l)}(c-0)=(-1)^{l-1}(-1)^l F^{(l)}(c+0)=-F^{(h)}(c+0)>0. \tag{3.6}$$

folgt. Also werden

$$L=R \quad \text{so wie} \quad L_\nu=(-1)^{l+\nu}R_\nu. \tag{3.7}$$

Daher gilt für den mit *geradem* l versehenden symmetrischen Fall

$$\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(c)]}{R}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/l}\Big\{2\Gamma\Big(1+\frac{1}{l}\Big)\varphi(c) \tag{3.8}$$

$$+\frac{\Gamma(1+2/l)}{R}\frac{2R_1}{l}\varphi(c)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/l}$$

$$+\frac{\Gamma(1+3/l)}{R^2}\Big[\frac{\varphi''(c)}{3}+\frac{\varphi(c)}{l}\Big(\frac{l+3}{l}R_1^2+2R_2\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2/l}$$

$$+\frac{\Gamma(1+4/l)}{R^3}\Big[\frac{\varphi''(c)}{l}R_1+\frac{2\varphi(c)}{l}\Big(\frac{(l+2)(l+4)}{3l^2}R_1^3$$

$$+\frac{l+4}{l}R_1R_2+R_3\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{3/l}+O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4/l}\Big\},$$

während, für den mit *ungeradem* l versehenden symmetrischen Fall,

$$\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(c)]}{R}\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/l}\Big\{2\Gamma\Big(1+\frac{1}{l}\Big)\varphi(c) \tag{3.9}$$

$$+\frac{\Gamma(1+2/l)}{R}\frac{2R_1}{l}\varphi(c)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{1/l}$$

$$+\frac{\Gamma(1+3/l)}{R^2}\Big[\frac{\varphi''(c)}{3}+\frac{\varphi(c)}{l}R_1\Big(\frac{l+3}{l}R_1^2+2R_2\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{2/l}$$

$$+\frac{\Gamma(1+4/l)}{R^3}\Big[\frac{\varphi''(c)}{l}R_1+\frac{2\varphi(c)}{l}\Big(\frac{(l+2)(l+4)}{3l^2}R_1^3$$

$$+\frac{l+4}{l}R_1R_2+R_3\Big)\Big]\Big(\frac{1}{n}\Big)^{3/l}+O\Big(\frac{1}{n}\Big)^{4/l}\Big\}.$$

Schließlich sei die Funktion $F(x)$ auf eine Umgebung von $x=c$ *regulär*, oder wenigstens stetig differenzierbar zur passenden Ordnung, so daß

$$F^{(\nu)}(c+0)=F^{(\nu)}(c-0)=F^{(\nu)}(c) \tag{3.10}$$

gilt. Da $F'(c)=\cdots=F^{(l-1)}(c)=0$ aber $F^{(l)}(c)\neq 0$ und das Maximum von $F(x)$ tatsächlich an $x=c$ stattfindet, so braucht sich die Ordnungszahl l bekanntlich[5] eine gerade Zahl $(=2m)$ zu sein. Daher erhält man nach (3.2)

$$R=L=\left(\frac{F^{(2m)}(c)}{-\underline{|2m}}\right)^{1/2m},\quad R_\nu=L_\nu=\frac{F^{(2m+\nu)}(c)}{\underline{|2m+\nu}}\Big/\frac{F^{(2m)}(c)}{-\underline{|2m}}, \tag{3.11}$$

so daß jede ungerade Potenz von $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2m}$ im Ausdruck unter äußersten Klammern von (3.3) sich aufhebt, und also

$$\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(c)]}{R}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2m}\left\{\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\varphi(c)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2m}\Gamma\left(\frac{3}{2m}\right)\frac{1}{R^2}\left[\frac{\varphi''(c)}{3}+\frac{\varphi'(c)}{m}R_1+\frac{\varphi(c)}{m}\left(\frac{2m+3}{4m}R_1^2+R_2\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)^{1/m}+O\left(\frac{1}{n}\right)^{2/m}\right\}. \tag{3.12}$$

Oder, ausführlich gedrückt,

$$\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \frac{\exp[nF(c)]}{(nF^{(2m)}(c)/-\underline{|2m})^{1/2m}}\left\{\frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\varphi(c)\right.$$
$$+\frac{3}{2m}\Gamma\left(\frac{3}{2m}\right)\frac{1}{(nF^{(2m)}(c)/-\underline{|2m})^{1/m}}\left[\frac{\varphi''(c)}{3}-\frac{\varphi'(c)F^{(2m+1)}(c)}{m(2m+1)F^{(2m)}(c)}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\varphi(c)}{m(2m+1)}\left(\frac{2m+3}{4m(2m+1)}\left(\frac{F^{(2m+1)}(c)}{F^{(2m)}(c)}\right)^2-\frac{F^{(2m+2)}(c)}{2(m+1)F^{(2m)}(c)}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n}\right)^{2/m}\right\}. \tag{3.13}$$

Ins besondere für $m=1$

$$\int_a^b \varphi(x)\exp[nF(x)]\,dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{-nF''(c)}}\exp\{nF(c)\}\left\{\varphi(c)-\frac{1}{2nF''(c)}\left[\varphi''(c)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\varphi'(c)F'''(c)}{F''(c)}+\varphi(c)\left(\frac{5}{12}\left(\frac{F'''(c)}{F''(c)}\right)^2-\frac{F''''(c)}{4F''(c)}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}, \tag{3.14}$$

was eine schon in früheren Zeiten von einem der Verfässer gefundene Formel ist[6]. Dabei sind die weiteren Korrekturglieder, wenn ferner ausgerechnet:

$$O\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{1}{8n^2}\left[\frac{\varphi''''}{F''^2}-\frac{1}{F''^3}\left(\frac{10}{3}F'''\varphi'''+\frac{5}{2}F''''\varphi''+F'''''\varphi'+\frac{1}{6}F''''''\varphi\right)\right.$$
$$+\frac{35}{6F''^4}\left(F'''^2\varphi''+F'''F''''\varphi'+\frac{1}{5}F'''F'''''\varphi+\frac{1}{8}F''''^2\varphi\right)$$
$$\left.-\frac{35}{2F''^5}\left(\frac{1}{3}F'''^3\varphi'+\frac{1}{4}F'''^2F''''\varphi\right)+\frac{385}{144}\frac{F'''^4}{F''^6}\varphi\right]. \tag{3.14.1}$$

---

5) In der Tat müßen nach unsren Kriterien (1.5) (2.5), beide Ungleichungen
$$F^{(l)}(c+0)=F^{(l)}(c)<0 \text{ und } (-1)^{l-1}F^{(l)}(c-0)=(-1)^{l-1}F^{(l)}(c)>0$$
zugleich bestehen, was meint daß l notwendig gerad ist.

6) Y. Watanabe, Methode der kleinsten Quadrate und Statistik, (1942), S. 556. (im Japanische).

Ebenso tun dieselben Korrekturglieder für den Fall, daß das Maximum am Ende auftritt, d.h. für (1.12) so wie (2.11).

§ **4.** Endlich wollen wir noch einige Beispielen hinzufügen. Es sei $\varphi(x)$ nicht nur absolut integrabel[7] in $-\infty<x<\infty$, auch sei regulär um $x=0$.

1. Es sei erstens $f(x)=e^{-x}$ für $0\leqq x<\infty$ definiert. Somit $F(x)=\log f(x)=-x$ und $F'(x)=-1$ aber sonstige $F^{(\nu)}(x)=0$ für alle ν. Trotzdem, weil unsre Voraussetzungen sämtlich erfüllt sind, kann die Lösung der Aufgabe 1 angewandt werden. Zwar nach (1.11) ist

$$(4.1)\quad \int_0^\infty \varphi(x)\exp\{-nx\}\,dx \simeq \frac{1}{n}\left\{\varphi(0)+\frac{1}{n}\varphi'(0)+\frac{1}{n^2}\varphi''(0)+\frac{1}{n^3}\varphi'''(0)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\}.$$

Zweitens sei $f(x)=e^{px}$ mit $p>0$ für $x\leqq 0$. Hier sind wiedermals für $F(x)=px$, $F'(x)=p$, aber sonst $F^{(\nu)}(x)=0$ und nach (2.10) gilt

$$(4.2)\quad \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\exp\{npx\}\,dx \simeq \frac{1}{np}\left\{\varphi(0)-\frac{1}{np}\varphi'(0)+\frac{1}{n^2p^2}\varphi''(0)-\frac{\varphi'''(0)}{n^3p^3}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\},$$

die besonders bei $p=1$

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x)\exp[nx]\,dx \simeq \frac{1}{n}\left\{\varphi(0)-\frac{1}{n}\varphi'(0)+\frac{1}{n^2}\varphi''(0)-\frac{1}{n^3}\varphi'''(0)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\}$$

wird. Diese mit die vorhergehende zusammengesetzt, liefert

$$(4.2)\quad \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)e^{-n|x|}\,dx \simeq \frac{2}{n}\left\{\varphi(0)+\frac{1}{n^2}\varphi''(0)+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right\}.$$

Es sei allgemeins die Funktion $f(x)=\exp\{-|x|^{2p+1}\}$, wo p positiv ganz, im Intervalle $-\infty<x<\infty$ symmetrisch, sonach mit ihrem Maximum an $x=0$, definiert. Man setze in (3.8) $l=2p+1$, $R=1$, $R_\nu=0$ und erhält

$$(4.4)\quad \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\exp\{-n|x|^{2p+1}\}\,dx \simeq \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(2p+1)}\left\{2\Gamma\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)\varphi(0)\right.$$
$$\left.+\Gamma\left(\frac{2p+4}{2p+1}\right)\frac{\varphi''(0)}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^{2/(2p+1)}+\left(\frac{1}{n}\right)^{4/2p+1}\right\}.$$

2. Obgleich die in $-\infty<x<\infty$ definierte Funktion $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ unendlich viele Maxima besitzt, erreicht sie am Anfangspunkte zwar größten Wert $(=1)$, und unsre Voraussetzungen sämtlich genügt sind. Aus die Entwickelung $F(x)=\log f(x)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{90}x^4+\cdots$ folgt, daß $F(0)=0$, $F^{(2\nu+1)}(0)=0$, $F''(0)=-\frac{2}{3}$, $F^{IV}(0)=-\frac{4}{15}$ und damit nach (3.14) erhält man

$$(4.5)\quad \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2n}dx \simeq \sqrt{\frac{3\pi}{n}}\left\{\varphi(0)+\frac{3}{4n}\left[\varphi''(0)-\frac{1}{10}\varphi(0)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

---

7) Mit Ausnahme von drei letzteren Beispielen 7, 8, 9, in welche aber $\varphi(x)f(x)^n$ für alle $n\geqq$ gewißes $m>0$ absolut integrabel und daher unsre Formeln noch gültig sind.

3. Die Funktion $f(x)=e^{-x^2}(1+x^2)$ hat ihren Maximalwert $(=1)$ am Anfangspunkte, weil $f'(x)=-2x^3e^{-x^2}$ ist. Aus lauter Entwickelung $F(x)=\log f(x)=-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\cdots$ sieht man sogleich, daß $F^{(2\nu+1)}(0)=0$, $F''(0)=0$, $F''''(0)=-12$, $F^{\mathrm{VI}}(0)=240$. Also $l=2m=4$ und erhält nach (3. 13)

$$\text{(4. 6)} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-nx^2}(1+x^2)^n dx \cong \left(\frac{2}{n}\right)^{1/4}\left\{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\varphi(0)\right.$$
$$\left.+\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Big[\varphi''(0)+\varphi(0)\Big)\Big]+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

4. Die Funktion $f(x)=\exp[-x^2(x^2-2)]$ wird an den symmetrischen Punkte $x=\pm 1$ doppelt maximal, wie aus $f'(x)=4x(1-x^2)\exp[-x^2(x^2-2)]$ gesehen werden kann. Jedoch möge man sich aufs Halbintervalle $0<x<\infty$ denken, wo das Maximum nur einmal am Punkt $x=1$ geschieht. Nun folgt aus $F(x)=\log f(x)=2x^2-x^4$, daß, der Reihe nach, $F'(x)=4x(1-x^2)$, $F''(x)=4(1-3x^2)$, $F'''(x)=-24x$, $F''''(x)=-24$, womit $F(1)=1$, $F'(1)=0$, $F''(1)=-8$, $F'''(1)=-24$, $F''''(1)=-24$. Daher, wieder nach (3. 14) erhält man

$$\text{(4. 7)} \quad \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\exp\{-nx^2(x^2-2)\}\,dx \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}e^n\left\{\varphi(1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16n}[\varphi''(1)-3\varphi'(1)+3\varphi(1)]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

Da nun die Funktion symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt liegt, so lautet das Integral, welches längs negativer Achse erstreckt wird,

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\exp\{-nx^2(x^2-2)\}\,dx \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}e^n\left\{\varphi(-1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16n}[\varphi''(-1)+3\varphi'(-1)+3\varphi(-1)]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\},$$

und daher

$$\text{(4. 8)} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\exp\{-nx^2(x^2-2)\}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}e^n\left\{\varphi(1)+\varphi(-1)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16n}\Big[\varphi''(1)+\varphi''(-1)-3(\varphi'(1)-\varphi'(-1))+3(\varphi(1)+\varphi(-1))\Big]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

5. Für die analogu mit der vorhergehende aber nun unsymmetrisch verlaufende Funktion $f(x)=\exp\left\{x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right\}$, $F(x)=x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, treten die Maxima an $x=-1$ und $x=2$ auf. Man sieht leicht daß $F(-1)=\frac{5}{12}$, $F'(-1)=0$, $F''(-1)=-3$, $F'''(-1)=8$, $F''''(-1)=-6$, so wie $F(2)=\frac{8}{3}$, $F'(2)=0$, $F''(2)=-6$, $F'''(2)=-10$, $F''''(2)=-6$. Mit Benützung von (3. 14) wiedermals, ergeben sich

$$(4.9)\quad \int_{-\infty}^{0} \varphi(x) \exp\left\{n\left(x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\right\} dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{3n}} \exp\left(\frac{5n}{12}\right)\left\{\varphi(-1) + \frac{1}{6n}\left[\varphi''(-1)+\frac{8}{3}\varphi'((-1)+\frac{133}{54}\varphi(-1)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\},$$

$$(4.10)\quad \int_{0}^{\infty} \varphi(x) \exp\left\{n\left(x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\right\} dx \simeq \sqrt{\frac{\pi}{3n}} \exp\left(\frac{8n}{3}\right)\left\{\varphi(2) - \frac{1}{2n}\left[\varphi''(2)-\frac{5}{3}\varphi'(2)+\frac{49}{54}\varphi(2)\right]+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

Weil $\exp\left\{\frac{5}{12}n\right\} \simeq 0\left(\exp\left\{\frac{8}{3}n\right\}\right)$ für genug größes n befriedigt ist, so ist (4. 9) im Vergleich zu (4. 10) vernachlässigbar. Wenn tatsächlich man das verbundene Intervall $-\infty < x < \infty$ als ganzes betrachtet, und (3. 14) anwendet, so erhält man, als asymtotischer Wert, bloß den rechts stehenden Ausdruck von (4. 10).

6. Die in $-\infty < x < \infty$ definierte Funktion $f(x)=\exp\{-x^{2/3}\}$ deutlich erreicht ihr Maximum an $x=0$. Da aber $F(x)=\log f(x)=-x^{2/3}$, und $F'(x) = -\frac{2}{3}x^{-1/3} \to \infty$ für $x \to 0$ zustrebt, so stellt sich heraus, daß unsre Lösung nutzlos wird. Führt jedoch man durch die Gleichung $x=\xi^3$ eine neue Variable ξ ein und setzt $\varphi(x)dx=3\xi^2\varphi(\xi^3)d\xi=\varphi_1(\xi)d\xi$, so kann man schreiben

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-nx^{2/3}\}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) \exp\{-n\xi^2\}\, d\xi .$$

Vorausgesetzt, daß $\varphi(x)=0\ (|x|^{\omega})$ bei wieviel großem ω für $|x| \to \infty$ gilt, so bleibt es auch dasselbe für neue Funktion $\varphi_1(\xi)$, und unsre Methode anwendbar. Wir erhalten das einfache Resultat

$$(4.11)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{nx^{-2/3}\}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\xi) \exp\{-n\xi^2\}\, d\xi \simeq \sqrt{\frac{\pi}{n}}\left\{\frac{\varphi(0)}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

Wir wollen noch drei weitere praktisch angewandte Beispiele notieren.

7. Man soll die Stirlingsche asymptotische Formel der Gammafunktion $\Gamma(n+1)$ wiederfinden. Aus

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t}\, dt = n^{n+1}\int_0^{\infty} x^n e^{-nx}\, dx \qquad (t=nx)$$
$$= n^{n+1}\int_0^{\infty} \exp\left[-n(x-\log x)\right] dx$$

folgt, daß $\varphi(x)=1$ und $F(x)=-x+\log x$ und die letztere Funktion für $x=1$ maximal mit

$$F(1)=-1\,,\quad F'(1)=0\,,\quad F''(1)=-1,\quad F'''(1)=2\,,\quad F''''(1)=-6$$

wird. Daher erhält man gemüß (3. 14)

(4. 12)
$$\Gamma(n+1) \simeq n^{n+1}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,e^{-n}\left\{1+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$
$$= \sqrt{2\pi n}\,n^n \exp\left\{-n+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}.$$

Das letzte Resultat wird dadurch versichert, daß von (3. 14. 1) aus $O(1/n^2) \simeq 1/288n^2$ gezeigt werden kann.

8. Es seien die n Paare von Abweichungen $x_i-m_1=u_i$, $y_i-m_2=v_i$, $(u_1, v_1)\cdots, (u_n, v_n)$ in einer aus normaler Bevölkerung $N(x, y, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$ genommenen Stichprobe. Bekanntlich ist der empirische Korrelationskoeffizient durch

$$r=\sum_{i=1}^{n} u_i v_i / \sqrt{\sum u_i^2 \sum v_i^2}$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

(4. 13)
$$f_n(r)=\frac{n-2}{\pi}(1-\rho)^{(n-1)/2}(1-r^2)^{(n-4)/2}\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{(1-\rho r t)^{n-1}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

gegeben[8]. Dieses Integral wird für $t=\operatorname{sech} s$ lediglich auf

$$\int_0^\infty \frac{ds}{(\cosh s-\rho r)^{n-1}}$$

reduziert, das die nämliche Gestalt (1. 1) hat, wofür

$$\varphi(s)=\cosh s-\rho r\,,\quad F(s)=\log f(s)=\log 1/(\cosh s-\rho r)\,.$$

Zwar erreicht $F(s)$ am anfänglichen Punkte $s=0$ ihr Maximum $F(0) = \log 1/(1-\rho r)$; und

$$F^{(2\nu+1)}(0)=0\,,\quad F''(0)=\frac{-1}{1-\rho r}\,,\quad F''''(0)=\frac{2+\rho r}{(1+\rho r)^2}\,,\quad F''''''(0)=-\frac{16+13\rho r+\rho^2 r^2}{(1-\rho r)^3}\,,$$

während $\varphi(0)=1-\rho r$, $\varphi^{(2\nu+1)}(0)=0$, $\varphi^{(2\nu)}(0)=1$ bei $\nu>0$. Damit haben wir nach (1. 12)

$$\int_0^\infty \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\frac{1}{(1-\rho r)^{n-3/2}}\left\{1+\frac{6+\rho r}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\},$$

und deshalb geht (4. 13) in

(4. 14)
$$f_n(r) \simeq \frac{n-2}{\sqrt{2n\pi}}\frac{(1-\rho^2)^{(n-1)/2}(1-r^2)^{(n-4)/2}}{(1-\rho r)^{n-3/2}}\left\{1+\frac{1}{8n}(6+\rho r)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

über. Dabei beträgen die Glieder $O(1/n^2)$ vermöge (3. 14. 1) um

(4. 14. 1)
$$O\left(\frac{1}{n^2}\right) \simeq \frac{100+36\rho r+9\rho^2 r^2}{128n^2}.$$

Aber sind diese Korrekturglieder für jetzt vernachlässigt, jedoch im nachstehenden Beispiele 9 spielen sehr wichtige Rolle.

---

8) Herald Cramér, Mathematical Methods of Statistics (1946), p. 398.

Jetzt schätzen wir den Mittelwert von r^k für genügend große n ab:

$$(4.15)\quad M(r^k)=\frac{n-2}{\sqrt{2n\pi}(1-\rho^2)}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}\,\sqrt{1-r^2}}{1-\rho r}\right)^n\frac{\sqrt{1-\rho r}^3\,r^k}{(1-r^2)^2}\left\{1+\frac{6+\rho r}{8n}\right\}dr,$$

das auch als (3.14) mit

$$F(r)=\log f(r)=\frac{1}{2}\log(1-\rho^2)+\frac{1}{2}\log(1-r^2)-\log(1-\rho r)$$

und

$$\varphi(r)=r^k\frac{(1-\rho r)^{3/2}}{(1-r^2)^2}\left\{1+\frac{1}{8n}(6+\rho r)\right\}$$

angesehen werden darf. Also liefert die Gleichung $F'(r)=0$ den Maximalpunkt $r=\rho$ und

$$F(\rho)=0,\quad F''(\rho)=\frac{-1}{(1-\rho^2)^2},\quad F'''(\rho)=\frac{-6\rho}{(1-\rho^2)^3},\quad F^{IV}(\rho)=\frac{-6(1+6\rho^2)}{(1-\rho^2)^4},$$

mit

$$\varphi(\rho)=\frac{\rho^k}{\sqrt{1-\rho^2}}\left\{1+\frac{6+\rho^2}{8n}\right\},\quad \frac{\varphi'}{\varphi}(\rho)=\frac{k}{\rho}+\frac{5\rho}{2(1-\rho^2)},$$
$$\frac{\varphi''}{\varphi}(\rho)=\frac{k(k-1)}{\rho^2}+\frac{5k}{1-\rho^2}+\frac{16+35\rho^2}{4(1-\rho^2)^2}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (3.14) findet man

$$(4.16)\qquad M(r^k)\simeq\rho^k\left\{1+\frac{k(1-\rho^2)(k-1-k\rho^2)}{2n\rho^2}\right\},\quad k=0,1,2,\cdots.$$

Somit

$$(4.17)\quad\begin{cases} M(r^0)=1,\quad M(r)=\rho\left(1-\dfrac{1-\rho^2}{2n}\right),\quad M(r^2)=\rho^2+\dfrac{(1-\rho^2)(1-2\rho^2)}{n},\\[2ex] D^2(r)=M(r^2)-M(r)^2=\dfrac{(1-\rho^2)^2}{n},\qquad \sigma_r=\dfrac{1-\rho^2}{\sqrt{n}}.\end{cases}$$

Mit hilfe von diesen Ergebnisse kann man den zentralen Grenzwertsatz in bezug auf r leicht beweisen: Führt man nämlich unter Berücksichtigung von (4.17)

$$(4.18)\quad \xi=\left[r-\rho\left(1-\frac{1-\rho^2}{2n}\right)\right]\Big/\frac{1-\rho^2}{\sqrt{n}},\quad \text{d.h. } r=\rho+(1-\rho^2)\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}-\frac{\rho}{2n}\right)$$

als neue Variable ein, so sieht man, daß der Ausdruck

$$(4.19)\qquad f_n(r)\frac{dr}{d\xi}\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(1-\rho^2)(1-\rho r)^{3/2}}{(1-r^2)^2}\right]\left[\frac{(1-\rho^2)(1-r^2)}{(1-\rho r)^2}\right]^{n/2}$$

gegen $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{\xi^2}{2}\right\}$ strebt. Denn, ihr zweiter Faktor strebt gegen $1+O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, während der Logarithmus des dritten Faktors

$$\frac{n}{2}\log\frac{1-2\rho\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}-\frac{\rho}{2n}\right)-(1-\rho^2)\frac{\xi^2}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{1-2\rho\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}-\frac{\rho}{2n}\right)+\frac{\rho^2\xi^2}{n}+O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}\cong-\frac{\xi^2}{2}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

wird.

9. Schließlich versuchen wir aus dem vorhergehenden Beispiele die berühmte Fishersche Formel zu herleiten[9]. Führt man nach Fisher $r=\tanh z$, $\rho=\text{tahn}\,\zeta$ ein, so drückt sich (4.14) folgendergestalt aus:

$$(4.20)\quad f_n(r)\,dr=(n-2)\sqrt{\frac{\operatorname{sech}\zeta}{2n\pi}}\,\frac{\sqrt{\cosh z\cosh^3(z-\zeta)}}{\cosh^n(z-\zeta)}\left[1+\frac{6+\rho\tanh z}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]dz\,,$$

wobei nach (4.14.1)

$$(4.20.1)\qquad O\left(\frac{1}{n^2}\right)\cong\frac{1}{128n^2}(100+36\rho\tanh z+9\rho^2\tanh^2 z)$$

ist. Wir haben den Mittelwert

$$(4.21)\qquad M(z^m)=(n-2)\sqrt{\frac{\operatorname{sech}\zeta}{2n\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^m\sqrt{\cosh z\cosh^3(z-\zeta)}}{\cosh^n(z-\zeta)}\times\left[1+\frac{6+\rho\tanh z}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]dz$$

zu ermitteln. Das Integral gehört noch zum Typus (3.14) mit

$$F(z)=-\log\cosh(z-\zeta)\,,$$

was an $z=\zeta$ den Maximalwert 0 erreicht. Weiter sind $F^{(2\nu+1)}(\zeta)=0$, $F''(\zeta)=-1$, $F''''(\zeta)=2$, $F''''''(\zeta)=-16$. Anderseits ist

$$\varphi(z)=z^m\sqrt{\cosh z\cosh^3(z-\zeta)}\left[1+\frac{6+\rho\tanh z}{8n}+\frac{100+36\rho\tanh z+9\rho^2\tanh^2 z}{128n^2}\right],$$

so daß

$$\varphi(\zeta)=\zeta^m\sqrt{\cosh\zeta}\left[1+\frac{6+\rho^2}{8n}+\frac{100+36\rho^2+9\rho^4}{128n^2}\right].$$

Durch wiedermalige Differenziationen nach z und Einsetzung $z=\zeta$ erhält man nach einander

$$\frac{\varphi'}{\varphi}(\zeta)=\frac{m}{\zeta}+\frac{\rho}{2}+\frac{\rho(1-\rho^2)}{8n}\,,$$

$$\frac{\varphi''}{\varphi}(\zeta)=\frac{m(m-1)}{\zeta^2}+\frac{m\rho}{\zeta}+\left(2-\frac{\rho^2}{4}\right)+\frac{1}{4n}\rho(1-\rho^2)\left[\frac{m}{\zeta}-\frac{\rho}{2}\right],$$

$$\frac{\varphi'''}{\varphi}(\zeta)=\frac{m(m-1)(m-2)}{\zeta^3}+\frac{3m(m-1)\rho}{2\zeta^2}+\frac{6m}{\zeta}\left(1-\frac{\rho^2}{8}\right)+2\rho\left(1+\frac{3}{16}\rho^2\right),$$

$$\frac{\varphi''''}{\varphi}(\zeta)=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\zeta^4}+\frac{2m(m-1)(m-2)}{\zeta^3}+\frac{12m(m-1)}{\zeta^2}\left(1-\frac{\rho^2}{8}\right)+\frac{8m\rho}{\zeta}\left(1+\frac{3}{16}\rho^2\right)+8-\rho^2-\frac{15}{16}\rho^4\,.$$

9) Cramér, loc. cit. pp. 399–400.

Damit gewinnt man vermöge (3. 14) und (3. 14. 1)

$$(4.22)\quad M(z^m) \simeq \frac{n-2}{n}\sqrt{1-\rho^2}\varphi(\zeta)\left[1+\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}+\frac{\varphi''}{\varphi}\right)+\frac{1}{8n^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{5\varphi''}{\varphi}+\frac{\varphi''''}{\varphi}\right)\right]$$

$$\simeq \zeta^m\left\{1+\frac{m}{2n\zeta}\left(\frac{m-1}{\zeta}+\rho\right)+\frac{m}{8n^2\zeta}\left[\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{\zeta^3}+\frac{2(m-1)(m-2)}{\zeta^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m-1}{\zeta}(12-\rho^2)+(9+\rho^2)\rho\right]\right\}.$$

Insbesondere

$$(4.23)\quad \begin{cases} M(z^0)=1\,, \quad M(z)=\zeta+\dfrac{\rho}{2n}+\dfrac{\rho}{8n^2}(9+\rho^2)\,, \\ M(z^2)=\zeta^2+\dfrac{1}{n}(1+\rho\zeta)+\dfrac{1}{4n^2}[12-\rho^2+(9+\rho^2)\rho\zeta]\,. \end{cases}$$

Und daher

$$(4.24)\quad D^2(z)=M(z^2)-M(z)^2 \simeq \frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\left(1-\frac{\rho^2}{6}\right).$$

Läßt man näherungsweise $M(z)=\zeta+\rho/2n$, $D^2(z)=1/n$, so sind die Korrekturgrößen ungefähr ρ/n^2 bzw. $3/n^2$. Das illustriert warum Fisher schicklich

$$(4.25)\quad M(z)=\zeta+\frac{\rho}{2(n-1)}\,, \quad D^2(z)=\frac{1}{n-3}$$

als bessere Schätzung aufstellte[10)].

Auch kann wieder der zentrale Grenzwertsatz für die Variable z leicht gefolgert werden. Gesetzt nämlich nach (4. 25)

$$\left[z-\zeta-\frac{\rho}{2(n-1)}\right]\Big/\frac{1}{\sqrt{n-3}}=\xi\,, \quad \text{d.h.} \quad z=\zeta+\frac{\xi}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

so formt (4. 20) folgendermaßen um :

$$(4.26)\quad f_n(r)\,dr$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\cosh(\zeta+\xi/\sqrt{n})}{\cosh\zeta}}\exp\left[-\left(n-\frac{3}{2}\right)\log\cosh\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)d\xi\,.$$

Da aber

$$\frac{\cosh(\zeta+\xi/\sqrt{n})}{\cosh\zeta}=\cosh\frac{\xi}{\sqrt{n}}+\tanh\zeta\,\sinh\frac{\xi}{\sqrt{n}}\simeq 1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

10) Wenn man anstatt des wahren Wertes $\frac{\rho}{2n}+\frac{\rho}{8n^2}(9+\rho^2)+\cdots$ Fishersche Schätzung $\frac{\rho}{2(n-1)}$ $\left(=\frac{\rho}{2n}+\frac{\rho}{2n^2}+\cdots\right)$ einnimmt, so scheint die Hauptkorrektur $\rho/2n^2$ noch etwas kleiner als die wirkliche Korrekturgröße $\frac{\rho}{n^2}\left(\frac{9+\rho^2}{8}\right)\doteqdot\frac{\rho}{n^2}$. Jedoch ist praktisch n zwar nicht so groß, so daß der annehmliche Wert $\frac{\rho}{2(n-2)}\left(=\frac{\rho}{2n}+\frac{\rho}{n^2}+\cdots\right)$ vielleicht allzuviel sein möchte.

und

$$\text{der Exponent} \simeq -n\left[\frac{\xi^2}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \simeq -\frac{\xi^2}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sind, sofort die Behauptung sich ergibt. Damit der Exponent $\simeq -\xi^2/2$ gilt, braucht es für jetziges (4. 26) nur $O\left(\frac{1}{n}\right) \simeq 0(1)$, während bei (4. 19) noch $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \simeq 0(1)$. Also schneller ist die normale Annäherung im Falle des z als diejenige mit r.