

EINIGE ERWEITERUNG DES PÓLYASCHE IRRFABRTPROBLEM¹⁾

Von

Yoshikatsu WATANABE

(Eingegangen am 30. September, 1957)

Es seien $z=0$, $z=1$, zwei parallele ebene ähnliche Straßennetze, die durch Elevator in jedem Kreuze—Knotenpunkte, d.h. Punkte mit ganzzahligen Koordinaten—vertikal kombiniert werden, so daß der im Straßennetze herumwandernde Punkt, welcher zur Zeit $t=0$ im Anfangspunkt des Koordinatensystems seine Irrfahrt beginnt mit der Geschwindigkeit 1, in jedem Zeitpunkt $t=1, 2, \dots$, an gewissen Knotenpunkt erreicht und dort mit Wahrscheinlichkeit $1/5$ für eine der 5 Richtungen, deren vier horizontale Kreuzen aber eine vertikales Auf- oder Abgehen sind, aufs Geratewohl sich entscheiden läßt. Zuerst behaupte ich, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zur Zeit $t=m$ der wandernde Punkt im Knotenpunkt (x, y, z) sich befindet, folgendermaßen dargestellt werden soll:

$$(1) \quad P_m(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta}}{5} \right)^m \exp \{-ix\varphi - iy\psi\} \sum_v \exp \{-iz_v \theta\} d\varphi d\psi d\theta,$$

wobei $z=0$ oder 1 ist, während jedes $z_v \equiv z \pmod{2}$ und die Summe $\sum_v$ mit z beginnt und durch $z_1 = m - |x| - |y|$ vollendet, jedennoch für die Fälle, daß entweder $m < |x| + |y| + z$ oder $m \not\equiv x + y + z \pmod{2}$ ist, es in $\sum_v$ einziges Glied z allein zu einnehmen ist, und dann $P_m(x, y, z)$ auf Null reduziert. Zweitens beweise ich, daß $P_{2n}(0, 0, 0) \approx 5/8n\pi$ für $n \rightarrow \infty$, so daß $\sum P_{2n}(0, 0, 0)$ divergiert und deshalb gegen 1 strebt die Wahrscheinlichkeit Ω_n , dafür, daß der wandernde Punkt innerhalb der Zeitspann $0 < t \leq 2n$ mindestens einmal wieder in dem Anfangspunkt zurückkehrt. Ferner betrachte ich dasjenige ebene Straßennetz, wofür $\sum P_{2n}(0, 0)$ konvergiert, und also Ω_n gegen $\Omega (< 1)$ strebt, und schließlich den Fall, daß außer Bewegungen längs jene zu Koordinatenachsen parallelen Richtungen noch ihre Superposition möglich kommt, sowie auch zeitweilige Pause zugelassen wird.

1) G. Pólya, Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz, Math. Ann. 84 (1924). Y. Watanabe, Aufgaben betreffend das Irrfahrtproblem, dieses Journ. Vol. 6 (1955), S. 41, dessen § 2 aber einen Irrtum enthält, was ich jetzt beseitigen will.

§ 1.

Ich habe die Formel (1) zu nachweisen. Da aber $\exp\{-ix\varphi - iy\psi\} = \cos x\varphi \cos y\psi - \sin x\varphi \sin y\psi - i \sin x\varphi \cos y\psi - i \cos x\varphi \sin y\psi$, und wegen

$$(2) \quad \cos^n \alpha = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} \cos(n-2k)\alpha,$$

wobei für gerades n das letzte absolute Glied noch mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden soll, ersichtlich $\int_0^{2\pi} \cos^n \psi \sin x\varphi d\psi = 0$ gelten, so möge (1) auch als

$$(3) \quad P_m(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta}}{5} \right)^m \cos x\varphi \cos y\psi \sum_{\nu} \exp\{-iz_{\nu}\theta\} d\varphi d\psi d\theta$$

gegeben werden.

Vorerst will ich einige Hilfssätze vorausschicken. Obgleich diese im Hinblick auf Wahrscheinlichkeit fast selbstverständlich sind, soll es bewiesen werden, daß dieselbe auch für die entsprechenden Ausdrücke (1) gelten:

1° Es lauten aus (3)

$$P_0(x, y, 0) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_0^{2\pi} \cos x\varphi \cos y\psi d\varphi d\psi d\theta = 1 \quad \text{bei } x = y = 0$$

aber

$$= 0 \quad \text{bei } (x, y) \neq (0, 0)$$

und

$$P_0(x, y, 1) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_0^{2\pi} \cos x\varphi \cos y\psi \cdot e^{-i\theta} d\varphi d\psi d\theta = 0.$$

Im allgemeinen bei $m > 0$ schreibe ich das Integral

$$(4) \quad \begin{aligned} & \iiint (2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta})^m \cos x\varphi \cos y\psi \sum_{\nu} \exp\{-iz_{\nu}\theta\} d\varphi d\psi d\theta \\ &= \sum_{\nu} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \iiint 2^r \cos^s \varphi \cos^{r-s} \psi \cos |x|\varphi \cos |y|\psi \\ & \quad \exp[(m-r-z_{\nu})\theta i] d\varphi d\psi d\theta. \end{aligned}$$

2° Für $0 < m < |x| + |y| + z$ ist $P_m(x, y, z) = 0$. In diesem Falle freilich braucht es als $z_{\nu} = z$ in der Summe $\sum_{\nu}$ von (1) nur einziges Glied $e^{-i\theta z}$ genommen zu werden.

Wieder der Formel (2) nach verschwinden alle Integrale in (4) außer demjenige mit $s-2k=|x|$, $r-s-2l=|y|$ und folglich $r=|x|+|y|+2k+2l$, wo $0 \leq k \leq [s/2]$, $0 \leq l \leq [(r-s)/2]$. Anderseits verschwindet das Integral für $m-r-z \neq 0$, während die Identität $m=r+z=|x|+|y|+z+2k+2l$ mit der ursprünglichen Annahme widerspricht, w.z.b.w.

3° Auch für $m \equiv x+y+z \pmod{2}$ wird $P_m(x, y, z) = 0$.

Z. B. seien (i) $x+y$ = gerad und $z=0$ so daß m ungerad. Dann werden alle z_{ν} gerad, damit für diejenige in bezug auf θ integrierte nicht verschwind-

ende Integral in (4) es $m-r=z_v$ also $r=m-z_v$ ungerad sein soll. Daher muß im Produkt $\cos^s \varphi \cos^{r-s} \psi$ ein der s und $r-s$ gerad und das andere ungerad sein. Andererseits sind x und y beide gerad oder beide ungerad. Daraus folgt wegen (2) eben

$$\iint \cos^s \varphi \cos^{r-s} \psi \cos x\varphi \cos y\psi d\varphi d\psi = 0, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Andere mögliche Fälle (ii) $x+y$ =gerad, $z=1$, (iii) $x+y$ =ungerad, $z=0$, (iv) $x+y$ =ungerad, $z=1$ sämtlich können ganz ebenso wie in (i) bewiesen werden. Ins besondere gilt für $x+y \equiv 0 \pmod{2}$

$$(5) \quad P_{2n+1}(x, y, 0) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint \left[\frac{2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta}}{5} \right]^{2n+1} \cos x\varphi \cos y\psi d\varphi d\psi d\theta = 0.$$

4° Man kann die Summe $\sum_v$ in (1) folgenderweise herstellen: Für $z=0$

$$\begin{aligned} \sum_v &= 1 + \exp(-2\theta i) + \dots + \exp\{-(m-|x|-|y|)\theta i\} \\ &= e^{i\theta} [\exp(-\theta i) + \exp(-3\theta i) + \dots + \exp\{-(m+1-|x|-|y|)\theta i\}], \end{aligned}$$

während für $z=1$

$$\sum_v = \exp(-\theta i) + \exp(-3\theta i) + \dots + \exp\{-(m-|x|-|y|)\theta i\}$$

die durch Addierung von $e^{\theta i}$, was wegen lauter Identität

$$\iiint (2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta})^m \cos x\varphi \cos y\psi \cdot e^{i\theta} d\varphi d\psi d\theta = 0$$

zulässig ist, folgendergestalt geschrieben werden kann:

$$e^{\theta i} [1 + \exp(-2\theta i) + \dots + \exp\{-(m+1-|x|-|y|)\theta i\}].$$

Im Falle $m \leq |x| + |y| + z$ wird $\sum_v$ bloß $e^{-i\theta z}$; deswegen hat man bei $z=0$ für $e^0=1$ lediglich $e^{i\theta} e^{-i\theta}=1$ zu einsetzen, und bei $z=1$ das ursprüngliche $e^{-i\theta}$ mit der Summe $e^{i\theta}(1+e^{-2\theta i})$ zu ersetzen.

5° Man darf auch zur Summe $\sum_v$ ein Glied $\exp\{-(z_i+2)\theta i\}$, d.h. $\exp\{-(m-|x|-|y|+2)\theta i\}$ hinzufügen; freilich im Falle $m \leq |x| + |y| + z$ reduziert das hinzufügende Glied lediglich auf $\exp\{-(z+2)\theta i\}$.

Um dies zu bestätigen, genügt es zu zeigen, daß

$$\iiint \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} 2^r \cos^s \varphi \cos^{r-s} \psi \cdot \cos x\varphi \cos y\psi \exp\{(m-r-z_i-2)\theta i\} d\varphi d\psi d\theta = 0.$$

Für etwaiges nicht-verschwindendes Glied soll es $m-r=z_i+2$, also $r=|x|+|y|-2$ sein. Andererseits braucht es $s-2k=|x|, r-s-2l=|y|$ mit nicht negative k und l , so daß $r=|x|+|y|+2k+2l$, was aber mit dem vorigen Schluß widerspricht. Daher sollen alle integrierte Glieder sämtlich verschwinden, w.z.b.w.

Jetzt da *personae dramatis* sich zusammengezogen haben, sind wir im stande die Formel (1) zu dartun.

Es seien $m+1 \geq |x| + |y| + z$ und $m+1 \equiv x+y+z \pmod{2}$, da sonst $P_{m+1}(x, y, z) = 0$, was schon in 2° und 3° erwiesen worden war. Nach 1° besteht (1) für $m=0$. Angenommen (1) für gewisses m , hat man sein nochmaliges Bestehen für $m+1$ zu beweisen. Dazu beachtet man

$$P_{m+1}(x, y, z) = \sum_j \frac{1}{5} P_m(x'_j, y'_j, z'_j),$$

wobei die Summe über die zu (x, y, z) nächstliegenden 5 Punkte erstreckt. Diese 5 Punkte sind $(x \pm 1, y, z)$, $(x, y \pm 1, z)$ und $(x, y, 1-z)$, für die bei m (1) schon anwendbar sind:

$$P_{m+1}(x, y, z) = \frac{1}{5} \sum_{j=1}^5 \frac{1}{8\pi^3} \iiint \left(\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + e^{i\theta}}{5} \right)^m \exp\{-ix\varphi - iy\psi\} F_j d\varphi d\psi d\theta,$$

wobei umständlich, wenn $m > |x| + |y| + z + 1$ ist,

$$F_1 = e^{-ix\varphi} \sum_v \exp\{-z_v \theta i\}, \text{ wo } z_v \text{ von } z \text{ bis zu } z_t = m - |x+1| - |y|,$$

$$F_2 = e^{ix\varphi} \sum_v \exp\{-z_v \theta i\}, \text{ wo } z_v \text{ von } z \text{ bis zu } z_t = m - |x-1| - |y|,$$

$$F_3 = e^{-iy\psi} \sum_v \exp\{-z_v \theta i\}, \text{ wo } z_v \text{ von } z \text{ bis zu } z_t = m - |x| - |y+1|,$$

$$F_4 = e^{iy\psi} \sum_v \exp\{-z_v \theta i\}, \text{ wo } z_v \text{ von } z \text{ bis zu } z_t = m - |x| - |y-1|,$$

und $F_5 = e^{i\theta} \sum_v \exp\{-z_v \theta i\}$, wo z_v von z bis zu $z_t = m+1 - |x| - |y|$ wegen 4° sind, während bei $m = |x| + |y| + z + 1$ oder $|x| + |y| + z - 1$ auch gewisse $\sum_v$ aus bloßes $e^{-iz\theta}$ allein sich entstehen sollen, aber die Fälle $m = |x| + |y| + z$, $|x| + |y| + z + 2$, ausgenommen wegen ursprünglichen zweiten Annahme $m+1 \equiv x+y+z \pmod{2}$.

Die erste 4 Summen können sämtlich wie selbst steht oder mit gebrauch von 5°, durch diejenige des F_5 ersetzt werden. Daher

$$P_{m+1}(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + e^{i\theta}}{5} \right)^{m+1} \exp\{-x\varphi i - y\psi i\} \sum_v \exp\{-iz_v \theta\} d\varphi d\psi d\theta,$$

wobei die Summe $\sum_v$ mit z beginnt und durch $m+1 - |x| - |y|$ vollendet, w.z.b.w.

Wegen Periodizität des Integrandes kann das Integrationsgebiet als jeder Würfel W : $-\alpha \leq \varphi, \psi, \theta \leq 2\pi - \alpha$ willkürlich genommen werden.

§ 2.

Nach (1) hat man besonders

$$(6) \quad P_{2n}(0, 0, 0) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + e^{i\theta}}{5} \right)^{2n} \sum_{k=0}^n \exp\{-2ik\theta\} d\varphi d\psi d\theta,$$

das unten abgeschätzt werden wird. Man sieht leicht, daß

$$\sum_{k=0}^n = \sum_{k=0}^n (\cos 2k\theta - i \sin 2k\theta) = \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} [\cos n\theta - i \sin n\theta],$$

und folglich
$$|\Sigma| = \left| \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin \theta} \right| \leq n+1.$$
²⁾

Da aber der Faktor nach absolutem Betrage

$$R = \left| \frac{2 \cos \varphi + 2 \cos \psi + e^{i\theta}}{5} \right|$$

für $\varphi = \psi = \theta = 0$ oder π innerhalb des Integrationsgebietes W sein Maximum 1 erreicht, so beträgt $R \leq \rho < 1$ in $W - W_0 - W_\pi = U$, wobei W_0 und W_π zwei offene Würfel mit jedem Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, (π, π, π) von beliebig kleiner aber doch wohl bestimmter Kantenlänge $2a$ bezeichnen. Damit wird

$$|J_U| = \left| \iiint_U \right| < (n+1)\rho^{2n} = 0 \quad (1/n^N) \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

wobei N irgendwie große aber feste positive Zahl sein mag. Andererseits ist der Beiträge aus W_0

$$\begin{aligned} J_{W_0} &= \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-a}^a \left[\frac{1}{5} \left(2 \cos \frac{t_1}{\sqrt{n}} + 2 \cos \frac{t_2}{\sqrt{n}} + \cos \frac{t_3}{n} + i \sin \frac{t_3}{n} \right) \right]^{2n} \\ &\quad \frac{\sin (n+1) t_3/n}{\sin t_3/n} e^{-it_3} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{n^2} \quad (\varphi = t_1/\sqrt{n}, \psi = t_2/\sqrt{n}, \theta = t_3/n) \\ &\cong \frac{1}{8\pi^3 n^2} \int_{-na}^{na} \int_{-na}^{na} \int_{-na}^{na} \exp \left[-\frac{2}{5} (t_1^2 + t_2^2) + \frac{2}{5} i t_3 + 0 \left(\frac{1}{n} \right) \right] \frac{\sin \left(1 + \frac{1}{n} \right) t_3}{\sin t_3/n} \\ &\quad \exp \{-it_3\} dt_1 dt_2 dt_3 \\ &\cong \frac{1}{8\pi^3 n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{2}{5} t_1^2 \right) dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{2}{5} t_2^2 \right) dt_2 \int_{-na}^{na} \frac{\sin \left(1 + \frac{1}{n} \right) t_3}{\sin t_3/n} \exp \left\{ -\frac{3}{5} i t_3 \right\} dt_3 \\ &\cong \frac{5}{16n\pi^2} \int_{-na}^{na} \frac{\sin t}{n \sin t/n} \left[\cos \frac{3}{5} t - i \sin \frac{3}{5} t \right] dt \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

2) Um diese Abschätzung zu prüfen, setze ich $\left\{ \frac{\sin (n+1)\theta}{(n+1)\sin \theta} \right\}^2 = F(\theta)$. Da diese Funktion periodisch, sogar symmetrisch in bezug auf $\theta = p\pi/2$ ($p=0, 1, 2, \dots$) ist, so braucht nur das Intervall $0 \leq \theta \leq \pi/2$ betrachtet zu werden. Evident ist $F(0) = 1$ und

$$F'(\theta) = \frac{2}{(n+1)^2} \frac{\sin (n+1)\theta}{\sin^3 \theta} [(n+1) \cos (n+1)\theta \sin \theta - \sin (n+1)\theta \cos \theta],$$

worin $\sin \theta > 0$ in $0 < \theta \leq \pi/2$. Nun gibt $F'(\theta) = 0$ entweder

$$(i) \sin (n+1)\theta = 0 \quad \text{oder} \quad (ii) \tan (n+1)\theta = (n+1) \tan \theta,$$

aus deren letzteres $\sin^2 (n+1)\theta = (n+1)^2 \sin^2 \theta / \{ \cos^2 \theta + (n+1)^2 \sin^2 \theta \}$ folgt. Offenbar liefert das ersteres den Minimumwert 0, während das letzteres den Maximumwert $F(\theta) = \frac{\sin^2 (n+1)\theta}{(n+1)^2 \sin^2 \theta}$

$$= \frac{1}{1+n(n+2) \sin^2 \theta} \leq 1, \text{ w. z. b. w.}$$

worin der imaginäre Teil wegen des ungeraden Faktors verschwindet. Da aber $0 < t/n < a$ als genug klein gewählt worden war, so strebt $n \sin t/n \cong t$, und

$$J_{W_0} \cong \frac{5}{16n\pi^2} \int_0^{na} \left(\sin \frac{8}{5}t + \sin \frac{2}{5}t \right) \frac{dt}{t} \cong \frac{5}{16n\pi} \quad \text{bei } n \rightarrow \infty,$$

auf daß

$$\int_0^\infty \sin ct \frac{dt}{t} = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } c > 0.$$

Ganz derselbe ist der Beitrag aus W_π . Daher gilt

$$(7) \quad P_{2n}(0, 0, 0) \cong \frac{5}{8n\pi},$$

während, wie schon in (5) gesehen, $P_{2n+1}(0, 0, 0) = 0$ ist.

Obgleich die obige Ergebnisse etwas verschieden von diejenige für Pólyasches Ebenenstraßennetz: $P_{2n}(0, 0) \cong 1/n\pi$, $P_{2n+1}(0, 0) = 0$ scheint, doch divergiert gleichviel gegenwärtige Reihe $\sum P_m(0, 0, 0)$ und damit stimmt weiterer Schluß mit Pólyaschem überein. Seien nämlich Ω_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer innerhalb der Zeitspann $0 < t \leq n$ nach dem Anfangspunkt zurückkehrt, und ω_m die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer zum ersten Male in $t = m$ auf den Anfangspunkt zurückkommt, so gilt $\Omega_n = \sum_{m=1}^n \omega_m$ mit $\omega_{2v+1} = 0$. Aber ist die Wahrscheinlichkeit $P_m(0, 0, 0)$ nichts anders als der Koeffizient von z^m in die Entwicklung des Bruches $(1 - \omega_2 z^2 - \omega_4 z^4 - \dots)^{-1}$, und deshalb besteht wohl

$$f(z) = 1 - \sum_{m=1}^\infty \omega_m z^m = 1 / \sum_{m=0}^\infty P_m(0, 0, 0) z^m.$$

Daraus folgt $f(1-0) = 0$ und $\sum_{m=1}^\infty \omega_m = 1$, wenn $\sum_{m=0}^\infty P_m(0, 0, 0) = \infty$. Also wird $\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = 1$, d.h. es ist gewiß, daß der Wanderer innerhalb endlicher Zeitspann wenigstens einmal und folglich auch unendlich oft auf den Anfangspunkt zurückkommt.

Überdies geht der Wanderer über jeden irgendwo in Straß liegenden Punkt (x, y, z) , sogar unendlich oftmal. Denn, da $P_m(x, y, z) > 0$ für solches $m \geq |x| + |y| + z$ und $m \equiv x + y + z \pmod{2}$ ist, und für irgendgroßes N er gewiß N mal auf 0 zurückkehrt und wiederaufbricht, so wird wegen Regel der Großenzahlen er ungefähr zu $NP_m(x, y, z)$ Malen den Punkt (x, y, z) besuchen. Ferner seien (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) irgend zwei Punkte auf Straße. Auf daß der Wanderer diese beide Punkte gewissermaßen besucht, ergibt sich daß es einen Verbindungsgang zwischen den zwei Punkte gibt, also *Tutte le strade conducono a Roma*.

3) Somit hier und in meinem früheren Essay würde es besser sein, anstatt von "Elevator" vielmehr mit "Ersteiger" (=risers, wie Herr J. Riordan in Mathematical Review gesagt hatte) zu ausdrücken

§ 3.

Im Falle, daß *der Elevator nur aufwärts aber nicht abwärts gehen kann*³⁾, soll die betreffende Wahrscheinlichkeit das folgende Gestalt annehmen:

$$(8) P_m(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_0^{2\pi} \left(\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + e^{i\theta}}{5} \right)^m \exp\{-ix\varphi - iy\psi - iz\theta\} d\varphi d\psi d\theta,$$

wobei z eine nicht-negative ganzzahlige dritte Variable ist, und nochmal gilt

$$P_0(0, 0, 0) = 1 \quad \text{bzw.} \quad P_0(x, y, z) = 0 \quad \text{für} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Ins besondere ist

$$P_m(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2}{5} \right)^m \iint_0^{2\pi} (\cos\varphi + \cos\psi)^m d\varphi d\psi,$$

demnach

$$P_{2n+1}(0, 0, 0) = 0,$$

während

$$\begin{aligned} P_{2n}(0, 0, 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{4}{25} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \iint_0^{2\pi} \cos^{2k}\varphi \cos^{2n-2k}\psi d\varphi d\psi \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{4}{25} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k}\varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2k}\psi d\psi. \end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$(9) \quad P_{2n}(0, 0, 0) = \frac{1}{25^n} \binom{2n}{n}^2,$$

und

$$(10) \quad P_{2n}(0, 0, 0) \simeq \frac{1}{n\pi} \left(\frac{16}{25} \right)^n \quad \text{für} \quad n \rightarrow \infty.$$

Hiemit konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0, 0, 0) (>1)$, so daß

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m = 1 / \sum_{m=0}^{\infty} P_m(0, 0, 0) < 1.$$

Daher bei genügend großes n ist $\Omega_n^v \simeq \Omega^v$, was gegen 0 für $v \rightarrow \infty$ strebt, d.h. *nach ziemlich länger Zeit $t=n\nu$ gibt es fast kein Zurückkehrende, und die Straßenebene $z=0$ wird fast unbewohnte Ruine.*

Die Sache wird vielmehr einfach bei ebener Bewegung. *Der wandernde Punkt, aufbrechend zur Zeit $t=0$ von 0 aus, herumwandere auf xy -Ebene mit der Geschwindigkeit 1, und an jedem Knotenpunkte entscheide nächsten Lauf mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$ für eine der 3 Richtungen, parallel zu x -sowie y -Achse.*⁴⁾ Zwar auf jeder x -Parallele ist der Verkehr ganz frei, indessen auf jeder y -Parallele es alleiniges Einbahnstraße, d.h. nur nach +Direktion gangbar ist. Bei solches Straße läßt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer zur Zeit $t=m$ an Knotenpunkt (x, y) sich findet, durch

4) Der Fall mit solchen einseitigem Wege ist auch von Sherman Lehman für ebenes hexagonales Straßennetz betrachtet worden: A Problem on Random Walk, Proc. of Symposium on Statistics, Dep. Matn. California Univ., p. 263 (1951).

$$P_m(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cos \varphi + e^{i\psi}}{3} \right)^m \exp\{-ix\varphi - iy\psi\} d\varphi d\psi$$

ausdrücken. Man denke sich nur den Fall, daß nicht bloß $m \equiv x+y \pmod{2}$ sondern auch $m \geq |x| + y$ ist, weil sonst $P_m(x, y) = 0$, was ebenso wie $2^\circ, 3^\circ$ in §1 beweisbar ist. Unter dieser Annahme erhält man

$$P_m(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{2^{m-y}}{3^m} \binom{m}{m-y} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{m-y} \varphi \cos |x| \varphi d\varphi.$$

Da aber

$$\cos^{m-y} \varphi = \frac{1}{2^{m-y-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor (m-y)/2 \rfloor} \binom{m-y}{k} \cos (m-y-2k) \varphi,$$

wobei, falls $m-y$ gerade ist, das letzte absolute Glied noch mit $\frac{1}{2}$ multipliziert werden soll, so wird das nach Integration bleibende Glied

$$\frac{1}{3^m} \cdot \frac{\binom{m}{\lfloor (m-y+|x|)/2 \rfloor}}{\lfloor (m-y+|x|)/2 \rfloor! \lfloor (m-y-|x|)/2 \rfloor!},$$

was wegen Voraussetzungen, daß $m - |x| - y \equiv 0 \pmod{2}$, sowie $m \geq |x| + y$, ein positiver Bruch ist. Ins besondere ist $P_{2n+1}(0, 0) = 0$ und $P_0(0, 0) = 1$, während

$$(11) \quad P_{2n}(0, 0) = \frac{1}{3^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{9^n} \frac{(2n)!}{n! n!},$$

und für $n \rightarrow \infty$

$$(12) \quad P_{2n}(0, 0) \simeq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(\frac{4}{9} \right)^n$$

gilt.⁵⁾ Demgemäß ist $\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0, 0) (> 1)$ gewiß konvergent, und hieraus folgt

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n} = 1 / \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(0, 0) > 1,$$

also bleibt die Wahrscheinlichkeit $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n}$ dafür, daß der Wanderer wenigstens einmal wieder nach dem Anfangspunkt zurückkehrt, gewiß ein positiver Bruch < 1 . Bei alledem kann man ebendenselben Schluß ziehen, wie der oben illustrierte Fall des mit alleinig aufwärtssteigendem Ersteigern versehenen ∞ -stöckigen Raumes: *Nach ziemlich längem Zeitverlaufe geben es fast keine Vorübergehenden auf Straßenbahnen $y=0, 1, 2, \dots$.*

Es ist etwas bemerkenswert, daß beim gewöhnlichen Irrfahrtproblem im d -dimensionalen Straßennetz, $\Omega = 1$ für $d=1$ oder 2 (lineare oder ebene Dimension) aber für $d \geq 3$ (räumliche Dimension) $\Omega < 1$ war, dennoch für

5) Wir erhalten ähnlichen Zahlenwert $\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \simeq \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ für dieselbe Wahrscheinlichkeit beim gewöhnlichen ebenen Straßennetz, oder doch bei vielfachen Münzenwerfenspiele; cf. W. Feller, An Introduction to Probability and its Applications, Vol. 1, p. 247 &c. (1950).

unser zweistöckigen Raum in §1 zwar $\Omega=1$ ist, während sogar $\Omega<1$ für Ebenesstraßennetz, in welchem nur alleinige Einbahnstraße längs y -Richtung gebaut ist.

Wir haben nach (9), (10) oder (11), (12), bzw. $P_{2n}(0, 0, 0)$ oder $P_{2n}(0, 0)$ berechnet:

n	$P_{2n}(0, 0, 0)$		$P_{2n}(0, 0)$		aus Pólyaschen Formel	
	aus (9)	aus (10)	aus (11)	aus (12)	$P_{2n}(0, 0) = \left(\frac{1}{4^n} \cdot \binom{2n}{n}\right)^2 \approx \frac{1}{n\pi}$	
0	1.	—	1.	—	1.	—
1	0.16	0.2037	0.2222	0.2508	0.25	0.3183
2	0.0576	0.0652	0.0741	0.0788	0.1406	0.1592
3	0.0256	0.0278	0.0274	0.0286	0.0977	0.1061
4	0.0127	0.0134	0.0107	0.0110	0.0748	0.0796
5	0.0065	0.0068	0.0043	0.0044	0.0606	0.0637
6	0.0035	0.0036	0.0017	0.0018	0.0509	0.0531
7	0.0019	0.0020	0.0007	0.0007	0.0439	0.0455
8	0.0011	0.0011	0.0003	0.0003	0.0386	0.0398
9	0.0006	0.0006	0.0001	0.0001	0.0344	0.0354
10	0.0004	0.0004	0.0001	0.0001	0.0311	0.0318
11	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0283	0.0289
12	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0260	0.0265
13	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0240	0.0245
14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0223	0.0227
15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0209	0.0212
Summe Σ	1.2703		1.3416		∞	
Σ^{-1}	0.7872		0.7454		0	
$Q=1-\Sigma^{-1}$	0.2128		0.2546		1	

§ 4.

Schließlich wünsche ich die Annahme, daß der Wanderer keine Pause hat, zu verschwächen⁶⁾. Es seien p_1 , p_2 und p_0 die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die auf Ebene herumwandernde Molekel je um ± 1 parallel zur x -, y - Achse in Einheitzeit sich bewegt, bzw. um $\pm\sqrt{2}$ parallel zur Linie $y=x$ oder $y=-x$, was aus Superposition der Verschiebungen längs x - sowie y -Richtung resultiert—wie etwa dem Zusammenstöße zwischen Molekeln gemäß Brownsche⁷⁾ Bewegung verursacht wird—und schließlich während nächster Zeiteinheit in demselben Punkt ruft, sodaß $p_0+4p_1+4p_2=1$ gilt.

Für jeden Knotenpunkt (x, y) sind es 8 Nachbarpunkte: $(x\pm 1, y)$, $(x, y\pm 1)$, $(x\pm 1, y\pm 1)$ und $(x\pm 1, y\mp 1)$, wobei die doppelten Zeichen in Klammern je ober oder unter gleichzeitig genommen werden sollen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitpunkt $t=m$ der wandernde Punkt im Knotenpunkt (x, y) sich findet,

6) Was ich in der früheren Note loc. cit. bereits gemacht hatte, aber hier wird es etwas verfeinert werden.

7) Die Irrfahrt-Approximation zur Brownschen Bewegung ist etwa in A. Dvoretzky and P. Erdős: Some Problems on random Walk in Space, in bevor unter 4) zitierten Literatur, p. 367, und noch weiter A. Dvoretzky: Brownian motion in space and subharmonic functions, behandelt worden.

ist

$$(13) \quad P_m(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} [\dot{p}_0 + 2\dot{p}_1(\cos \varphi + \cos \psi) + 2\dot{p}_2\{\cos(\varphi + \psi) + \cos(\varphi - \psi)\}]^m \exp\{-ix\varphi - iy\psi\} d\varphi d\psi,$$

wobei α irgendeine positive Zahl $\leq \pi$ bedeutet. Offenbar ist (13) richtig für $m=0$. Falls (13) für gewisses m gültig ist, so geht es auch für $m+1$. Denn, da

$$P_{m+1}(x, y) = \dot{p}_0 P_m(x, y) + \dot{p}_1 P_m(x \pm 1, y) + \dot{p}_1 P_m(x, y \pm 1) + \dot{p}_2 P_m(x \pm 1, y \pm 1) + \dot{p}_2 P_m(x \pm 1, y \mp 1),$$

setzt man P_m im rechtstehenden Ausdrücke durch (13) ein, so folgt

$$\begin{aligned} P_{m+1}(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \iint [\dot{p}_0 + 2\{\dot{p}_1 \cos \varphi + \dot{p}_1 \cos \psi + \dot{p}_2 \cos(\varphi + \psi) + \dot{p}_2 \cos(\varphi - \psi)\}]^m e^{-ix\varphi - iy\psi} \\ &\quad \times [\dot{p}_0 + \dot{p}_1(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}) + \dot{p}_1(e^{\psi i} + e^{-\psi i}) + \dot{p}_2(e^{(\varphi+\psi)i} + e^{-(\varphi+\psi)i}) \\ &\quad + \dot{p}_2(e^{(\varphi-\psi)i} + e^{-(\varphi-\psi)i})] d\varphi d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint [\dot{p}_0 + 2\{\dot{p}_1 \cos \varphi_1 + \dot{p}_1 \cos \psi + \dot{p}_2 \cos(\varphi + \psi) + \dot{p}_2 \cos(\varphi - \psi)\}]^{m+1} \\ &\quad \exp\{-ix\varphi - iy\psi\} d\varphi d\psi, \end{aligned}$$

w.z.b.w. Ins besondere gilt

$$P_m(0, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} [\dot{p}_0 + 2\{\dot{p}_1 \cos \varphi + \dot{p}_1 \cos \psi + \dot{p}_2 \cos(\varphi + \psi) + \dot{p}_2 \cos(\varphi - \psi)\}]^m d\varphi d\psi.$$

Wir wollen dies für genug großes m abschätzen, und dazu den Integrand nach absolutem Betrag $|A|$ erwägen. Dies erreicht sein Maximum 1 für $\varphi = \psi = 0$ innerhalb des ganzen Integrationsgebietes Q . Daher wird $|A| \leq \rho^m \rightarrow 0$ (m^{-N}) im abgeschlossenen Gebiet $Q - Q_0$, wo Q_0 ein kleines offenes Quadrat mit Mittelpunkt $(0, 0)$ von Kantenlänge $2a$ ($0 < a < 1$) bedeutet. Andererseits ist der Beitrag aus Q_0

$$\begin{aligned} \iint_{Q_0} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-a}^a [\dot{p}_0 + 2\{\dot{p}_1 \cos \varphi + \dot{p}_1 \cos \psi + \dot{p}_2 \cos(\varphi + \psi) + \dot{p}_2 \cos(\varphi - \psi)\}]^m d\varphi d\psi \\ &= \frac{1}{4\pi^2 m} \iint_{-a\sqrt{m}}^{a\sqrt{m}} \exp m \log \left[\dot{p}_0 + 2\dot{p}_1 \left(\cos \frac{t}{\sqrt{m}} + \cos \frac{t'}{\sqrt{m}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\dot{p}_2 \left(\cos \frac{t+t'}{\sqrt{m}} + \cos \frac{t-t'}{\sqrt{m}} \right) \right] dt dt' \quad (\varphi = t/\sqrt{m}, \psi = t'/\sqrt{m}) \\ &\cong \frac{1}{4\pi^2 m} \iint_{-a\sqrt{m}}^{a\sqrt{m}} \exp m \log \left[1 - \frac{1}{m} (\dot{p}_1 + 2\dot{p}_2)(t^2 + t'^2) \right] dt dt' \\ &\quad \text{(falls } m \text{ groß und } a \text{ klein)} \\ &\cong \frac{1}{4\pi^2 m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-(\dot{p}_1 + 2\dot{p}_2)t^2\} dt \right]^2 = \frac{1}{4\pi m(\dot{p}_1 + 2\dot{p}_2)}. \end{aligned}$$

Also besteht für passend großes m

$$(14) \quad P_m(0, 0) \cong 1/4\pi(p_1 + 2p_2)m,$$

und $\sum P_m(0, 0)$ divergiert gegen ∞ . Die Wahrscheinlichkeit Ω_n dafür, daß die Molekel innerhalb $0 < t \leq n$ auf den Anfangspunkt zurückkommt, strebt gegen 1 für $n \rightarrow \infty$, in Übereinstimmung mit dem Pólyaschen Resultat.

Ganz ebenso kann man auch für Raum fortfahren: Zunächst wird die betreffende Wahrscheinlichkeit beim dreidimensionalen Raum folgenderweise dargestellt:

$$(15) \quad P_m(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\alpha}^{2\pi-\alpha} E^m \exp \{-ix\varphi - iy\psi - iz\chi\} d\varphi d\psi d\chi,$$

wobei

$$E = p_0 + 2p_1(\cos \varphi + \cos \psi + \cos \chi) + 2p_2[\cos(\varphi \pm \psi) + \cos(\varphi \pm \chi) + \cos(\psi \pm \chi)] \\ + 2p_3[\cos(\varphi + \psi \pm \chi) + \cos(\pm \varphi \mp \psi + \chi)]$$

und

$$p_0 + 6p_1 + 12p_2 + 8p_3 = 1$$

sind. Zweitens sind es 27 Nachbarpunkte für jeden Knotenpunkt (x, y, z) :

- (i) 6 Punkte $(x, y, z \pm 1)$, $(x, y \pm 1, z)$, $(x \pm 1, y, z)$;
- (ii) 12 Punkte $(x \pm 1, y \pm 1, z)$, $(x \pm 1, y \mp 1, z)$ und dgl.;
- (iii) 8 Punkte $(x \pm 1, y \pm 1, z \pm 1)$, $(x \pm 1, y \pm 1, z - 1)$, $(x \pm 1, y \mp 1, z + 1)$, $(x \pm 1, y \mp 1, z - 1)$;
- (iv) der nämliche Punkt (x, y, z) ;

von einjeder (i), (ii), (iii), (iv) aus es nach Einheitzeit mit Wahrscheinlichkeit p_1, p_2, p_3, p_0 bzw. zum Punkt (x, y, z) erreichbar sind. Dadurch aber leicht kann die vollständige Induktion der Formel (15) von m zu $m+1$ geleistet werden. Ferner nimmt der faktor E in (15) nach absolutem Betrage ersichtlich seinen Maximumwert 1 für $\varphi = \psi = \chi = 0$, und zuletzt können wir schließen, daß

$$(16) \quad P_m(0, 0, 0) \cong [8\pi(p_1 + 4p_2 + 4p_3)m]^{-3/2} \quad \text{für } m \rightarrow \infty,$$

damit $\sum P_m(0, 0, 0)$ konvergent und $\Omega = \lim \Omega_n < 1$ ist. Also erscheint ganz anderes als der vorige ebene Fall: der Wanderer kommt nicht notwendigerweise auf Anfangsstelle zurück.

Am Ende sei es zum Vergleiche bemerkt, daß der Fall, worin jede Bewegungsrichtung *überallhin* genommen werden möge, erst von Pearson gefragt und später von Kluyver und Rayleigh schönweise folgendermaßen gelöst worden ist⁸⁾:

Es sei nämlich ein Wanderer auf r, θ -Polarkoordinatenebene, der zur Zeit

8) K. Pearson: Nature, 72 (1905), p. 294.

J. Kluyver: Proc. Section of Sci., K. Akad. Amsterdam, 8 (1906), p. 604.

Lord Layleigh: Phil. Mag., 37 (1919), p. 321.

G. Watson: Theory of Bessel Functions (1922), p. 419.

Y. Fusimi: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (im Japanische).

$t=0$ von O aus mit Geschwindigkeit 1 aufbräche und zur Zeit $t=0, 1, 2, \dots$ seine nächste Laufrichtung überallhin aufs Geratewohl auswähle. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er zur Zeit $t=n$ innerhalb des Kreises von Radius r sich findet, nach Kluyver ist

$$P_n(r) = r \int_0^\infty J_1(rt) [J_0(t)]^n dt,$$

wobei J_0, J_1 Besselfunktionen bedeuten, und woraus

$$P_n(1) = P_n = \frac{1}{n+1}$$

folgt. Bezeichnet man nun mit Ω_n und ω_m die respektive Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer innerhalb der Zeitspann $0 < t \leq n$ bzw. erstmal in $t=m \leq n$ auf $K: r \leq 1$ zurückkommt, so gilt $\sum_{m=1}^n \omega_m = \Omega_n$. Da aber

$$P_n = \omega_n + \sum_{h+k=n} \omega_h \omega_k + \sum_{h+k+l=n} \omega_h \omega_k \omega_l + \dots$$

ist,⁹⁾ deswegen

$$\sum_{n=0}^\infty P_n z^n = (1 - \sum_{m=1}^\infty \omega_m z^m)^{-1},$$

wobei beide unendliche Reihen für $|z| < 1$ konvergieren, weil außer $P_0=1$ sämtliche P_n, ω_m positive genuine Brüche sind. Hiermit bei $z \rightarrow 1-0$

$$1 - \sum_{m=1}^\infty \omega_m = 1 / \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = 0, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega = 1.$$

Es ist also ganz gewiß, daß der Wanderer wenigstens einmal und folglich auch unendlich oft zu $K: r \leq 1$ zurückkehrt.

Im Falle der räumliche Wanderung nach Lord Layleigh ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit für großes n

$$P_n^{(3)}(r) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{r/\sigma} t^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} t^2 \right\} dt,$$

mit $\sigma^2 = n/3\sigma$. Daraus erkennen wir, daß

$$P_n^{(3)}(1) \cong \sqrt{\frac{6}{\pi}} \frac{1}{n^{3/2}}$$

und $\sum_{n=0}^\infty P_n^{(3)}(1) (> 1)$ konvergiert, so daß $0 < \Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = 1 - 1 / \sum_{n=0}^\infty P_n^{(3)}(1) < 1$. Daher ist $1 - \Omega > 0$, was meint, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer ohne sogar einmalige Zurückkehrung ins Kugelgebiet $K: r \leq 1$ lediglich ins Unendliche entgeht, eben positiv ist und also im Raum gewiß sich verbreiten die Molekeln ins Unendliche (Diffusion).

9) Hier, aus Stetigkeitsprinzip ist es angenommen, die Wahrscheinlichkeit ω_n ungefähr zu sein, dafür daß der zur Zeit $t=0$ von einem Punkte in K aufbrächende Wanderer in $t=n$ erstmal innerhalb des Kreises K zurückkommt.

Ganz ebenso für den Fall der Wanderung im $d(\geq 3)$ -dimensionalen Raume wird die Wahrscheinlichkeit

$$P_n^{(d)}(r) \cong \frac{r}{\Gamma\left(\frac{1}{2}d\right)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}rt\right)^{d/2-1} J_{d/2}(rt) \exp\left\{-\frac{nt^2}{2d}\right\} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \left(\frac{r^2d}{2n}\right)^{d/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d+1; -\frac{r^2d}{2n}\right),$$

wobei ${}_1F_1(\alpha, \beta, z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\nu-1)}{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\nu-1)} \frac{z^\nu}{\nu!}$, also ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d+1; -\frac{r^2d}{2n}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{d}{d+2\nu} \left(\frac{r^2d}{2n}\right)^\nu$ ist. Daher ist

$$P_n^{(d)}(1) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} \left(\frac{d}{2n}\right)^{d/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}+1, -\frac{d}{2n}\right).$$

Aber, da ${}_1F_1\left(\frac{1}{2}d, \frac{d}{2}+1, -\frac{d}{2n}\right) \cong 1$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, so strebt

$$P_n^{(d)}(1) \cong \left(\frac{d}{2}\right)^{d/2} \frac{1}{\Gamma(d/2+1)} \cdot \frac{1}{n^{d/2}} \quad (d \geq 3).$$

Also ist $\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(d)}(1) (> 1)$ konvergent, infolgedessen $0 < \Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = 1 - 1/\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(d)}(1) < 1$ und deswegen entgeht der Wandernde Punkt schließlich ins Unendliche.

Nachträglich sei es noch bemerkt, daß unsre Formel (6) nach Ausführung der Integration in mehr klarer Form frei von imaginären Potenzen folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$(17) \quad P_{2n}(0, 0, 0) = \frac{1}{5^{2n}} \sum_{r=0}^n \binom{2n}{2r} \binom{2r}{r}^2,$$

und woraus folgende Werte berechnet werden mögen:

n	0	1	2	3	4	5
$P_{2n}(0, 0, 0)$	1	0.2	0.0976	0.0641	0.0480	0.386 &c.

