Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. VII. 1956.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER LAPLACE-TRANSFORMATION

Von

Yoshikatsu WATANABE

(Eingegangen am 30 September, 1956)

Während die gewöhnliche Laplace-Transformation

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-su}F(u)du$$

auf der Funktion einer Vairiable bezieht, erwäge ich diejenige in bezug auf der Funktion von n Variablen

$$f(s_1,\cdots\cdots,s_n)=\int_0^\infty\cdots\cdots\int_0^\infty \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu u_\nu\right\}F(u_1,\cdots\cdots,u_n)du_1\cdots\cdots du_n,$$

und ins besondere den Fall $n=2$

$$f(s,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)\,dudv.$$

Bei noch besondereren Fall $s=t$ wird es

$$f(s,s)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u,v)dudv,$$

was, gesetzt $u+v=\xi$, $u-v=\eta$,

$$f(s,s)=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s\xi}d\xi\int_{-\xi}^{\xi}F\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)d\eta=\int_0^\infty e^{-s\xi}G(\xi)d\xi$$

also auf den Fall $n=1$ sich reduziert. Jedoch die verschiedenen Ergebnisse zu übersehen, scheint es mir vielmehr besser die Sache in paralleler Weise zu dem Falle einer Variable zu betrachten. Dazu hat man nur einiges darüber maßgebendes Buch[1)] fast wörterlich umzuschreiben. Ich habe es mit meinem privaten Wünsch zu den Text umständlich verstehen können getan.

§ 1.

Es sei das Grundbereich, in dem die vorkommenden Funktionen definiert sind, immer $0\leqq u<\infty$, $0\leqq v<\infty$. Die Funktion $F(u,v)$ sei in jedem endlichen Teilbereich $0\leqq u\leqq U$, $0\leqq v\leqq V$ summierbar im Lebesqueschen Sinn, was zur Folge hat, daß neben

1) Z. B., G. Doetsch, Handbuch der Laplace-Transformaiton, 1950.

$\int_0^U\int_0^V F(u,v)dvdu$ immer auch $\int_0^U\int_0^V |F(u,v)|\,dvdu$ existiert. Dann ist für jedes komplexe s,t auch $e^{-su-tv}F(u,v)$ noch eine derartige, da e^{-su-tv} in jedem endlichen Bereich beschränkt bleibt. Es existiert also für jedes endliche U und V

$$\int_0^U\int_0^V e^{-su-tv}F(u,v)dvdu \quad \text{und} \quad \int_0^U\int_0^V |e^{-su-tv}F(u,v)|\,dvdu.$$

Gibt es ein reelles oder komplexes Wertepaar s_0, t_0 derart, daß

$$(1) \qquad \lim_{\omega,\omega'\to\infty}\int_0^\omega\int_0^{\omega'} e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)dvdu=f(s_0,t_0)$$

existiert, so heiße $f(s_0,t_0)$ ein **zwei-parametriges Laplace-Integral.**

Lemma 1. Zur Konvergenz des Limes (1) ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\Omega=\Omega(\varepsilon)>0$ so wählen kann, daß

$$(2) \qquad \left|\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_2'}-\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_1'}\right|<\varepsilon \quad \text{mit ausgelassenen } e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)dvdu$$

für jene Wertepaare ω_1,ω_1' und ω_1,ω_2' mit $\Omega\leqq\omega_1\leqq\omega_2$ und $\Omega\leqq\omega_1'\leqq\omega_2'$ gilt. Oder, noch ausführlich bedeutet (2), daß alle drei Ungleichungen

$$(3) \qquad (\text{i})\equiv\left|\int_0^{\omega_1}\int_{\omega'_1}^{\omega'_2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (\text{ii})\equiv\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_0^{\omega'_1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad (\text{iii})\equiv\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_{\omega'_1}^{\omega'_2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

erfüllt sind. Zwar ist es klar, daß (3) hinreichend für (2) ist. Aber für $\omega_2=\omega_1$ oder $\omega_2'=\omega_1'$ stimmt (2) mit (i) oder (ii) überein, und da

$$(\text{iii})\leqq\left|\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_2'}-\int_0^{\omega_1}\int_0^{\omega_1'}\right|+(\text{i})+(\text{ii})$$

ist, so muß (iii) stets bestehen, wenn (2) und folglich (i) und (ii) auch gelten, also ist (3) für Bestehen von (2) notwendig.

Lemma 2. Ein besonderer Fall ist der, daß Laplace-Integral absolut konvergiert, d. h. daß

$$\lim_{\omega,\omega'\to\infty}\int_0^\omega\int_0^{\omega'} |e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)|\,dvdu=\lim_{\omega,\omega'\to\infty}\int_0^\omega\int_0^{\omega'} e^{-\sigma_0u-\tau_0v}|F(u,v)|\,dvdu.$$

mit $\sigma_0=\Re s$ und $\tau_0=\Re t_0$ existiert. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\Omega=\Omega(\varepsilon)>0$ so bestimmen kann, daß nach (3) die folgenden drei Ungleichungen mit ausgelassenen $\exp\{-\sigma_0u-\tau_0v\}|F(u,v)|\,dvdu$

$$(4) \qquad \left|\int_0^{\omega_2}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'}\right|<\varepsilon, \qquad \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_0^{\omega_2'}\right|<\varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'}\right|<\varepsilon$$

für $\Omega\leqq\omega_1\leqq\omega_2$, $\Omega\leqq\omega_1'\leqq\omega_2'$ bestehen.

Satz. 1. *Ist $F(u,v)$ außer einem passenden Rechteck beschränkt,*

$$(5) \qquad |F(u,v)| \leqq C$$

für $u \geqq U$ *mit* $v \geqq 0$, *sowie für* $v \geqq V$ *mit* $u \geqq 0$, *so ist das Laplace-Integral für jedes Wertepaar* s_0, t_0 *mit* $\Re s_0 > 0$, $\Re t_0 > 0$ *abrolut konvergent.*

Beweis. Es sei σ_0, τ_0 ein feste Zahlenpaar mit $\Re s_0 = \sigma_0 > 0$, $\Re t_0 = \tau_0 > 0$, so ist für $U \leqq \omega_1 \leqq \omega_2$ sowie $V \leqq \omega_1' \leqq \omega_2'$ mit ausgelassenen $\exp\{-\sigma_0 u - \tau_0 v\}|F(u.v)|dvdu$

$$\left|\int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'}\right| < C\int_0^{\omega_1} e^{-\sigma_0 u}du \int_{\omega_1'}^{\omega_2'} e^{-\tau_0 v}dv < \frac{C}{\sigma_0\tau_0} e^{-\tau_0\omega_1'} < \varepsilon$$

für $\omega_1' > \Omega(\varepsilon)$, und ebenso sind für $\omega_1 > \Omega(\varepsilon)$

$$\left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_0^{\omega_1'}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'}\right| < \frac{C}{\sigma_0\tau_0} e^{-\sigma_0\omega_1 - \tau_0\omega_1'} < \varepsilon.$$

Also bestehen Bedingungen (4), w.z.b.w.

Deutet man die Parameter s und t als komplexe Variablen in jeden s– und t–Ebene, so konvergiert das Lapalce-Integral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)dv\,du$$

für eine beschränkte und in jedem endlichen Bereich integrierbare Funktion mindestesn in der Mannigfaltigkeit der offenen Halbebenen $\Re s > 0$, $\Re t > 0$, und zwar sogar absolut. Es kann aber in einem noch umfangreicheren Gebiet absolut konvergieren; so ist z. B. für $F(u,v) = e^{-u-v}$ offenkundig für $\Re s > -1$, $\Re t > -1$ absolut konvergent

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}e^{-u-v}dudv = \frac{1}{(s+1)(t+1)} \qquad \text{für} \quad \Re(s+1) > 0, \quad \Re(t+1) > 0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß jedes in einem Punkt (s_0, t_0) absolut konvergente Laplace-Integral sofort in der Mannigfaltigkeit zweier ganzer Halbebenen konvergiert. Es gilt nämlich

Satz 2. *Ist ein Laplace-Integral in einem Punkt* (s_0, t_0) *absolut konvergent, so ist es in der abgeschlossenen Mannigfaltigkeit* $\Re s \geqq \Re s_0$, $\Re t \geqq \Re t_0$ *absolut konvergent.*

Beweis. Für $\Re s = \sigma \geqq \sigma_0 = \Re s_0$, $\Re t = \tau \geqq \tau_0 = \Re t_0$ gilt

$$\int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} |e^{-su-tv}F(u,v)|\,dv\,du = \int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} \left| e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}e^{-s_0u-t_0v}\right| F(u,v)dv\,du$$

$$= \int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} e^{-(\sigma-\sigma_0)u-(\tau-\tau_0)v}|e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)|\,dv\,du \leqq \int_0^{\omega_1}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} |e^{-s_0u-t_0v}F(u_1 v)|\,dv\,du.$$

Ganz ebenso

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_0^{\omega_1'} |e^{-su-tv}F(u,v)|\,dv\,du \leqq \int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_0^{\omega_1'} |e^{-s_0u-t_0v}\,F(u,v)|\,dv\,du$$

und

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} |e^{-su-tv}F(u,v)|\,dv\,du \leqq \int_{\omega_1}^{\omega_2}\int_{\omega_1'}^{\omega_2'} |e^{-s_0u-t_0v}\ F(u,v)|\,dv\,du.$$

Wenn die Bedingung (4) für s_0,t_0 erfüllt ist, so erst recht für s,t.

Satz 3. *Das genaue Gebiet absoluter Konvergenz des Laplace-Integrals ist die Mannigfaltigkeit offener oder abgeschlossener Halbebenen* $\Re s>\alpha$ *(oder* $\geqq\alpha$*) und* $\Re t>\alpha'$ *(oder* $\geqq\alpha'$*), wobei* α,α' *auch gleich* $-\infty$ *oder* $+\infty$ *sein können.*

Jeder Rand $\Re s=\alpha$, $\Re t=\alpha'$ kann nur entweder ganz (wie bei der Funktion $F(u,v) =[1+(u^2+v^2)^2]^{-1}; \alpha=\alpha'=0$), oder gar nicht (wie bei der Funktion $F(u,v)=[1+u^2+v^2]^{-1}$; $\alpha=\alpha'=0$) zum Gebiet absoluter Konvergenz gehören.

Das Wertepaar (α,α') heißt die **Koordinaten absoluter Konvergenz,** das Gebiet $\{\Re s>\alpha,\ \Re t>\alpha'\}$, oder $\{\Re s\geqq\alpha,\ \Re t\geqq\alpha'\}$ falls nochmalige Konvergenzen auf ganzen Ränder stattfinden, die **Halbebenen-Mannigfaltigkeit absoluter Konvergenz** des Laplace-Integrals.

§ 2.

Wir fragen nun, wie das Gebiet von s- und t-Werten aussieht, wo das Laplace-Integral nicht notwendig absolut, sondern einfach konvergiert. Dazu schicken wir einen Satz voraus, den wir unten etwas allgemeiner formulieren, als es hier nötig wäre.

Satz 4. *Wenn* $G(u,v)=0(\rho^k)$ *mit* $k\geqq 0$ *für* $\rho=\sqrt{u^2+v^2}\to\infty$ *ist, so ist das Integral*

$$(6)\qquad \int_0^\infty\int_0^\infty (st)^{\frac{k}{2}+1}e^{-su-tv}G(u,v)\,du\,dv$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty (st)^{\frac{k}{2}+1}\exp\{-\rho(s\cos\theta+\ t\sin\theta)\}\ G\,(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\ \rho\,d\rho\,d\theta$$

in der Mannigfaltigkeit jedes ziemlich abgerundeten Winkelraumes $\mathfrak{W}$ *(*$s=0$ *als Spitze und* $|\arg s| \leqq\psi<\frac{\pi}{2}$ *aber mit Ausnahme eines Kreises* K *von Mittelpunkt* $s=0$ *mit beliebig kleinem Radius) und desjeniges* $\mathfrak{W}'$ *(*$t=0$, $|\arg t|\leqq\psi<\frac{\pi}{2}$, *ausgenommen* K'*) zwar gleichmaßig konvergent.*

Beweis. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\omega>0$, so daß $|G(u,v)|<\varepsilon\rho^k$ für $\rho\geqq\omega$ ist. Dann ist der Rest für $\omega\leqq\rho_1<\rho_2$ und jedes s in $\mathfrak{W}$ und t in $\mathfrak{W}'$

$$|R|=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}(st)^{\frac{k}{2}+1}\exp\{-\rho(s\cos\theta+t\sin\theta)\}\ G\,(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta\right|$$

$$\leqq\varepsilon|st|^{\frac{k}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\exp\{-\rho(\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta)\}\rho^{k+1}d\rho\,d\theta,$$

wobei $0<\sigma=\Re s\leqq|s|$ und $0<\tau=\Re t\leqq|t|$ sind. Durch Einsetzung von $\rho(\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta) =w$ wird

$$|R|<\varepsilon\left|\frac{st}{\sigma\tau}\right|^{\frac{k}{2}+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sqrt{\sigma\tau}}{\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta}\right)^{k+2}d\theta\int_0^\infty e^{-w}w^{k+1}dw$$

$$< \frac{\varepsilon\Gamma(k+2)}{(\cos\psi)^{k+2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sqrt{\cos\gamma\ \sin\gamma}}{\cos(\theta-\gamma)}\right]^{k+2} d\theta,$$

wo $\gamma=\tan^{-1}\tau/\sigma$ ist und wegen angenommener Abrundungen der Winkelspitzen $0<\varepsilon_1 \leqq \sigma,\tau$ demzufolge $0<\varepsilon_2<\gamma<\frac{\pi}{2}-\varepsilon_2$ und das letzte Integral $<\pi/(\sqrt{2}\sin\varepsilon_2)^{k+2}=M$ wird. Daher gilt unsere Abschätzung

$$|R|<\varepsilon\Gamma(k+2)M/(\cos\psi)^{k+2} \qquad \text{unabhängig von } s \text{ und t.}$$

Es ist aber möglich die Abrunderungen wie viel klein auch immer zu machen. Anderseits für $s=t=0$ ist die Abschätzung trivialerweise erfüllt.

Zusatz 4. Bei $s=t$ ergibt es sich, daß, falls $G(u,v)=0(\rho^k)$ mit $k\geqq 0$ ist,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty s^{k+2}e^{-s(u+v)}\,G(u,v)\,du\,dv \tag{7}$$

in $\mathfrak{W}\left(0, |\arg s|\leqq\psi<\frac{\pi}{2}\right)$ gleichmäßig konvergiert. Ferner, wenn $G(u,v)$ eine Funktion der Variable u allein $=g(u)$ und $g(u)=0(u^k)$ ist, so reduziert sich der Ausdruck (7) auf

$$\int_0^\infty s^{k+1}e^{-su}g(u)du, \tag{8}$$

das in $\mathfrak{W}$ gleichmäßig konvergiert.

Wir vorbereiten noch ein

Lemma 3. Die partielle Integration zweier Variablen kann folgendermaßen geleistet werden

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)g_{xy}(x,y)dy\,dx=\Big[\!\Big[f(x,y)g(x,y)\Big]\!\Big]_{a,c}^{b,d}-\int_a^b\Big[f_x(x,y)g(x,y)\Big]_c^d dx \tag{9}$$
$$-\int_c^d\Big[f_y(x,y)g(x,y)\Big]_a^b dy+\int_a^b\int_c^d f_{xy}(x,y)g(x,y)\,dy\,dx,$$

wobei

$$\Big[\!\Big[f(x,y)g(x,y)\Big]\!\Big]_{a,c}^{b,d}=f(b,d)g(b,d)-f(b,c)g(b,c)-f(a,d)g(a,d)+f(a,c)g(a,c). \tag{10}$$

Satz 5. *Konvergiert ein Laplace-Integral für* s_0, t_0

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s_0u-t_0v}\,F(u,v)\,du\,dv=f_0, \tag{11}$$

so kanvergiert das Laplace-Integral

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)du\,dv \tag{12}$$

gleichmäßig in der mannigfaltigkeit $\{\mathfrak{W},\mathfrak{W}'\}$, *wo* $\mathfrak{W}$ *einen Winkelraum in s-Ebene mit* s_0 *als Spitze aber etwas abgerundet und* $|\arg(s-s_0)|\leqq\psi<\frac{\pi}{2}$ *sowie* $\mathfrak{W}'$ *denjenigen in t-Ebene bedeuten. Ins-*

besondere konvergiert es also für jeden Punkt (s,t) *der offenen Mannigfaltigkeit* $(\Re s=\sigma>\sigma_0=\Re s_0,$ $\Re t=\tau>\tau_0=\Re t_0)$. *Wird ferner*

$$\int_0^u\int_0^v e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)dv\,du=\Phi(u,v), \qquad \text{also} \qquad e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)=\Phi_{uv}(u,v) \tag{13}$$

gesetzt, so läßt sich das Laplace-Integral (11) *für jedes* s,t *mit* $\sigma>\sigma_0, \tau>\tau_0$ *durch folgendes andere*

$$(s-s_0)(t-t_0)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}\Phi(u,v)du\,dv, \tag{14}$$

und für $\sigma>\sigma_0, \tau>\tau_0$ *und* $s=s_0$, $t=t_0$ *durch*

$$f_0+\int_0^\infty\int_0^\infty (s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}[\Phi(u,v)-f_0]dv\,du \tag{15}$$

darstellen. Das letztere Integral konvergiert gleichmäßig in jeder Mannigfaltigkeit $\{\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'\}$.

Beweis. Aus Lemma 3 folgt bei jetztigem Fall für beliebige komplexe s,t

$$\int_0^\omega\int_0^\omega e^{-su-tv}F(u,v)\,dv\,du=\int_0^\omega\int_0^{\omega'} e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)\,dv\,du$$

$$=e^{-(s-s_0)\omega-(t-t_0)\omega'}\Phi(\omega,\omega')+\int_0^\omega(s-s_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)\omega'}\Phi(u,\omega')\,du$$

$$+\int_0^{\omega'}(t-t_0)e^{-(s-s_0)\omega-(t-t_0)v}\Phi(\omega,v)dv+\int_0^\omega\int_0^{\omega'}(s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}\Phi(u,v)dv\,du,$$

da $\Phi(u,v)$ verschwindet, wenn eines oder beide von u,v veschwindet. Addiert man hierzu die Gleichung

$$0=f_0\{1-e^{-(s-s_0)\omega}\}\{1-e^{-(t-t_0)\omega'}\}-\int_0^\omega\int_0^{\omega'}(s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}f_0\,dv\,du,$$

so ergibt sich

$$\int_0^\omega\int_0^{\omega'}e^{-su-tv}F(u,v)\,dv\,du=f_0\{1-e^{-(s-s_0)\omega}\}\{1-e^{-(t-t_0)\omega'}\}$$

$$+e^{-(s-s_0)\omega-(t-t_0)\omega'}\Phi(\omega,\omega')+e^{-(t-t_0)\omega'}\int_0^\omega(s-s_0)e^{-(s-s_0)u}\Phi(u,\omega')\,du$$

$$+e^{-(s-s_0)\omega}\int_0^{\omega'}(t-t_0)e^{-(t-t_0)v}\Phi(\omega,v)\,dv+\int_0^\omega\int_0^{\omega'}(s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}[\Phi(u,v)$$
$$-f_0]\,dv\,du$$

$$=f_0+e^{-(s-s_0)\omega-(t-t_0)\omega'}[\Phi(\omega,\omega')-f_0]+e^{-(t-t_0)\omega'}\int_0^\omega(s-s_0)e^{-(s-s_0)u}[\Phi(u,\omega')-f_0]du$$

$$+e^{-(s-s_0)\omega}\int_0^{\omega'}(t-t_0)e^{-(t-t_0)v}[\Phi(\omega,v)-f_0]dv+\int_0^\omega\int_0^{\omega'}(s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}[\Phi(u,v)$$
$$-f_0]\,dv\,du$$

$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}.$$

Wegen $\Phi(\omega,\omega')\to f_0$ für $\omega,\omega'\to\infty$ konvergiert II auf rechten Seite für $\omega,\omega'\to\infty$ in $\{\Re s \geqq \Re s_0, \Re t \geqq \Re t_0\}$ (also $|e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}|\leqq 1$) gleichmäßig und zwar gegn 0. Bezüglich III ist es gleich 0 falls $s=s_0$, $t=t_0$, sonst aber konvergiert das Integral nach Zusatz (8) (mit $s-s_0$ an Stelle von s und $k=1$, da $\Phi(u,\omega')-f_0=O(1)=0(v)$ ist[2)]) gleichmaßig in $\mathfrak{W}$, und der Faktor gegen 0 in $\mathfrak{W}'$, dieselben für IV, und schließlich V nach Satz 4 (mit $k=0$ und $s-s_0$, $t-t_0$ an Stelle von s, t) gleichmaßig in $\{\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'\}$, also die linke Seite gleichmäßig in $\{\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'\}$ und zwar gegen

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)\,dv\,du=f_0+\int_0^\infty\int_0^\infty(s-s_0)(t-t_0)e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}[\Phi(u,v)-f_0]\,dv\,du.$$

Das ist der Ausdruck (15), der für $s=s_0$, $t=t_0$ und für jedes s, t mit $\Re s>\Re s_0$ bzw. $\Re t>\Re t_0$ gilt, da man jedes solche s, t in $\mathfrak{W}$ bzw. $\mathfrak{W}'$ einfassen kann. Läßt man den Punkt (s_0, t_0) weg, und betrachtet nur $\Re s>\Re s_0$ bzw. $\Re t>\Re t_0$, so ist

$$(s-s_0)(t-t_0)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(s-s_0)u-(t-t_0)v}f_0\,du\,dv$$

konvergent und gleich f_0, so daß sich (15) auf (14) reduziert.

Satz 6. *Bleiben sämtliche Limites von*

$$\Phi(U,V)=\int_0^V\int_0^U e^{-s_0u-t_0v}F(u,v)\,dv\,du \qquad (U,V\geqq 0) \tag{16}$$

für $U+V\to\infty$ *alle und jedes endlich und ins besondere* (11) *gültig, so sind die in* (14) *und* (15) *vorkommenden Integral für* $\sigma>\sigma_0$, $\tau>\tau_0$ *absolut konvergent.*

Beweis. Die Funktionen $\Phi(u,v)$ und $\Phi(u,v)-f_0$ sind für $u,v\geqq 0$ stetig und haben endliche Grenzwerte für $u+v\to\infty$, sind also beschränkt[3)], so daß die Integrale (14) und (15) nach Satz 1 für $\Re(s-s_0)>0$, $\Re(t-t_0>0$ absolut konvergieren.

Aus der Tatsache, daß die Konvergenz des Laplace-Integrals in einem Punkt (s_0, t_0) die Konvergenz in der Mannigfaltigkeit der offenen Halbebenen $\Re s>\Re s_0$, $\Re t>\Re t_0$ nach sich zieht, ergibt sich nun wörtlich bei der absoluten Konvergenz.

Satz 7. *Das genaue Gebiet der (einfachen) Konvergenz des Laplace-Integrals ist eine Mannigfaltigkeit* $\Re s>\beta$, $\Re t>\beta'$, *deren Ränder* $\Re s=\beta$ *bzw.* $\Re t=\beta'$ *ganz, teilweise oder gar nicht zum Konvergenzgebiet gehören können. Eines oder beide von* β,β' *können auch je* $-\infty$ *oder* $+\infty$ *sein.*

Das Wertepaar (β, β') heißt die **Konvergenz-Koordinaten,** das Gebiet $\Re s>\beta$, $\Re t>\beta'$ mit Einschluß der eventuellen Konvergenzpunkte auf $\Re s=\beta$, $\Re t=\beta'$ die

2) Dabei braucht man als $s-s_0=(s-s_0)^2/(s-s_0)$ sich denken, und dies ist plausible wegen $|s-s_0|\neq 0$ infolge der Abrundung der Spitze von $\mathfrak{W}$.

3) Es seien z. B. $s_0=t_0=0$ und $F(v,v)\equiv F(u)=1,-1,0$ jenachdem $0\leqq u<1$, $1\leqq u\leqq 2$ oder $2<u<\infty$ ist. Dann wird $\Phi(U,V)=\int_0^U\int_0^V F(u,v)\,dv\,du=UV$, $(2-U)V$ oder 0. Daher gelten $\Phi(0,\infty)=0$, $\Phi(0<U<2,\infty)=\infty$, $\Phi(2\leqq U<\infty,\infty)=0$ und $\Phi(\infty,0\leqq V\leqq\infty)=0$, also $f_0=0$, jedoch ist dieses $\Phi(U,V)$ keinerlei beschränkt, und zu unserer Kategorie nicht gehört, obgleich das Laplace-Integral $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)\,du\,dv$ für $\Re t>0$, $\Re s>0$ absolut konvergiert. Es möchte also möglich sein, meine Annahme (16) etwas zu erschwächen können.

Konvergenz-Mannigfaltigkeit der Halbebenen, die Geraden $\Re s=\beta$ bzw. $\Re t=\beta'$ die **Konvergenzgeraden**[4].

Daß tatsächlich auf den Ränder $\Re s=\beta$, $\Re t=\beta'$ alle Möglichkeiten des Konvergenzverhaltens vorliegen können, ziehen, folgende Beispiele:

a) $$F(u,v)=[1+(u^2+v^2)^2]^{-1}, \qquad \beta=\beta'=0;$$

in allen Punkten der Geraden $\Re s=0$, $\Re t=0$ konvergiert das Laplace Integral, sogar absolut.

b) $$F(u,v)=(1+u^2+v^2)^{-1}, \qquad \beta=\beta'=0;$$

in Punkte $s=0, t=0$ divergiert das Laplace-Integral, in allen anderen Punkten mit $\Re s=0$, $\Re t=0$ (also $s=iy$, $t=iy'$, wo y, y' reell und beide zwei $\neq 0$, obgleich aber nur cines $=0$ sein möge) konvergiert es, aber nicht absolut, denn zwar

$$\int_0^\infty e^{-iyu}du\int_0^\infty\frac{dv}{1+u^2+v^2}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{\cos yu}{\sqrt{1+u^2}}du-\frac{\pi}{2}i\int_0^\infty\frac{\sin yu}{\sqrt{1+u^2}}du$$

und diese Integrale sind für $y\neq 0$ konvergent, wie ihre Darstellung durch unendliche Reihen erkennen läßt.

c) $$F(u,v)=1, \qquad \beta=\beta'=0\,;$$

in allen Punkten mit $\Re s=0$, $\Re t=0$ divergiert das Laplace-Integral.

§ 3.

Um di Koordinaten einfacher und absoluter Konvergenz festzustellen, kann man sich offenbar auf reelle s, t beschränken. Natürlich ist

$$\beta\leqq\alpha, \qquad \beta'\leqq\alpha'.$$

Zuerst wollen wir uns zum Falle $s=t$ beschränken, viz.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u,v)\,du\,dv,$$

und seine gemeinsamen Konvergenzabszissen β bestimmen.

Satz 8. *Wird mit* $U+V=W$

$$\overline{\lim_{W\to\infty}}\frac{1}{W}\log\left|\int_0^U\int_0^V F(u,v)\,dv\,du\right|=\lambda \tag{17}$$

gesetzt, so ist

---

4) Oder, da jene Ordinaten von ihre Punkte zusammengefassen eine Ebene bilden, so möge die Gesamtheit $\{\Re s=\beta, \Re t=\beta'\}$ als Konvergenzränderebene genannt werden —— freilich ist dies ganz andere als die Konvergenz-Halbebene des gewöhnilichen einparametrigen Laplace-Integrals.

$$a)\quad \beta \leqq \lambda, \qquad b)\quad \lambda \leqq \operatorname{Max}(0,\beta), \qquad c)\quad \beta = \lambda \quad \textit{für} \quad \lambda > 0.$$

Beweis. *a)* λ sei endlich. Wir zeigen daß

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)(u+v)} F(u,v)\,du\,dv$$

für jedes $\delta > 0$ konvergiert. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int_0^u \int_0^v F(u,v)\,dv\,du = \varphi(u,v) \text{ und daher } F(u,v) = \varphi_{uv}(u,v),$$

so folgt durch partielle Integration (9)

$$\int_0^\omega \int_0^{\omega'} e^{-(\lambda+\delta)(u+v)} F(u,v)\,dv\,du = e^{-(\lambda+\delta)(\omega+\omega')}\varphi(\omega,\omega') + (\lambda+\delta)\int_0^\omega e^{-(\lambda+\delta)(u+\omega')}\varphi(u,\omega')\,du$$

$$+(\lambda+\delta)\int_0^{\omega'} e^{-(\lambda+\delta)(\omega+v)}\varphi(\omega,v)\,dv + (\lambda+\delta)^2 \int_0^\omega\int_0^{\omega'} e^{-(\lambda+\delta)(u+v)}\varphi(u,v)\,dv\,du$$

$$= \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

Für $u+v=w>W$ gilt nach (17)

$$\frac{1}{w}\log|\varphi(u,v)| < \lambda + \delta/2, \quad \text{also } |\varphi(u,v)| < e^{(\lambda+\delta/2)w},$$

so daß

$$e^{-(\lambda+\delta)w}|\varphi(u,v)| < e^{-\frac{\delta}{2}w}.$$

Hieraus erstens folgt, daß bei $\omega+\omega' = \Omega > W$

$$|\mathrm{I}| \leqq e^{-(\lambda+\delta)\Omega}|\varphi(\omega,\omega')| < e^{-\frac{\delta}{2}\Omega} \to 0 \qquad \text{für} \quad \Omega\to\infty.$$

Zweitens hat II für $\Omega\to\infty$ einen Grenzwert. Denn, falls ω mit Ω gegen ∞ strebt,

$$\mathrm{II} = (\lambda+\delta)\int_0^W e^{-(\lambda+\delta)(u+\omega')}\varphi(u,\omega')\,du + R,$$

wo

$$|R| \leqq |\lambda+\delta| \int_W^\omega e^{-(\lambda+\delta)(u+\omega')}|\varphi(u,\omega')|\,du \leqq |\lambda+\delta|\int_W^\omega e^{-\frac{\delta}{2}(u+\omega')}\,du$$

$$\leqq |\lambda+\delta|\int_W^\infty e^{-\frac{\delta}{2}u}du = \frac{2|\lambda+\delta|}{\delta}\,e^{-\delta W/2} < \varepsilon.$$

Oder, falls ω endlich bleibt, dann für $W>\omega$, $R=0$ und

$$|\mathrm{II}| \leqq |\lambda+\delta|\int_0^\omega e^{-(\lambda+\delta)(u+\omega')}|\varphi(u,\omega')|\,du < |\lambda+\delta|\,\omega e^{-\frac{\delta}{2}\Omega} \to 0 \quad \text{für } \Omega\to\infty.$$

Ganz ebenso sich verhält III. Schließlich kann man mit Berücksichtigung des Lemmas 1 beweisen, daß IV für $\Omega\to\infty$ gegen einen Grenzwert strebt, so daß dasgleiche für die linke Seite gilt. Also Also $\beta \leqq \lambda$. Ist $\lambda = -\infty$, so gilt derselbe Beweis mit jeder beliebigen negativen Zahl A an statt von λ, und es folgt $\beta \leqq A$, also $\beta = -\infty$. Ist $\lambda = +\infty$, so ist die Aussage $\beta \leqq \lambda$ trivial.

b) Es sei $s_0 > 0$ und $\Phi(U, V, s_0) = \int_0^U \int_0^V e^{-s_0(u+v)} F(u, v) dv du$ mit $U, V \geqq 0$

für jedes $W = U + V \to \infty$ konvergent[5], und demgemäß $|\Phi(u, v, s_0)| \leqq C$, da $\Phi(u, v, s_0)$ als Integral in jedem endlichen Gebiet stetig ist, während in jedem unendlichen Gebiet es noch beschränkt bleibt. Durch partielle Integration erhält man

$$\Phi(\omega, \omega', 0) \equiv \varphi(\omega, \omega') = \int_0^\omega \int_0^{\omega'} e^{s_0(u+v)} e^{-s_0(u+v)} F(u, v) dv du$$

$$= e^{s_0(\omega+\omega')} \Phi(\omega, \omega', s_0) - s_0 \int_0^\omega e^{s_0(u+\omega')} \Phi(u, \omega', s_0) du$$

$$- s_0 \int_0^{\omega'} e^{s_0(\omega+v)} \Phi(\omega, v, s_0) dv + s_0^2 \int_0^\omega \int_0^{\omega'} e^{s_0(u+v)} \Phi(u, v, s_0) dv du.$$

Also gilt

$$|\varphi(\omega, \omega')| \leqq Ce^{s_0\Omega} + C(e^{s_0\Omega} - e^{s_0\omega'}) + C(e^{s_0\Omega} - e^{s_0\omega}) + C(e^{s_0\omega} - 1)(e^{s_0\omega'} - 1)$$

$$\leqq 4Ce^{s_0\Omega} \leqq e^{(s_0+\delta)\Omega}, \qquad (\delta > 0)$$

wenn $\omega + \omega' = \Omega$ etwas groß $\geqq W$ wird, und $4C \leqq e^{\delta\Omega}$ gilt. Folglich ist außer dem rechtwinkligem Dreieck mit Nullpunkt als Spitze und gleichen Seiten W, $|\varphi(\omega, \omega')| < e^{(s_0+\delta)\Omega}$. Hieraus aber ergibt sich

$$\frac{\log |\varphi(\omega, \omega')|}{\Omega} < s_0 + \delta, \quad \text{also } \lambda \leqq s_0 + \delta \text{ für jedes } \delta > 0.$$

Mithin $\lambda \leqq s_0$. Ist die Konvergenzabszisse $\beta \geqq 0$ und endlich, so kann s_0 jede Zahl $> \beta$ bedeuten, und man erhält $\lambda \leqq \beta$. Für $\beta = \infty$ ist die Aussage trivial. Ist dagegen $\beta < 0$, so kann s_0 jede Zahl > 0 bedeuten, so daß $\lambda \leqq 0$ gilt. Es ist also allgemein $\lambda \leqq$ Max $(0, \beta)$.

c) Aus *a)* und *b)* ergeben sich die Behauptung *c)* folgendermaßen: Ist $\lambda > 0$, so liefert *b)*: $0 < \lambda \leqq$ Max $(0, \beta)$. Also kann nicht Max $(0, \beta) = 0$, sondern nur $= \beta$ sein. Aus $\beta \leqq \lambda$ und $\lambda \leqq \beta$ folgt $\beta = \lambda$.

Zusatz 8. Es sei $\lambda > 0$ in (17) und $F(u,v) = F_1(u)$ eine Funktion von u allein. Dann ergeben siech

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(u+v)} F(u, v) dv du = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda u} F_1(u) du,$$

5) Oder, mindestens mögen alle Limites schwingend sein. Also falls beide $U, V \to \infty$ streben, so liegt $|\Phi(U, V)|$ zwissen gewiße $|P_1 + iQ_1| \leqq C$ und $|P_2 + iQ_2| \leqq C$ für das Gebiet $U > \Omega$, $V > \Omega$. Sonst, dagegen, liegt eines von U, V z. B. U an endlichen Wert U_0 nahe, so gilt das gleiche für das Gebiet $U_0 - \varepsilon < U < U_0 + \varepsilon$, $\Omega < V \to \infty$.

$$\int_0^U\int_0^V F(u,v)\,dv\,du = V\int_0^U F_1(v)du \quad \text{oder} \quad 0 \ (V=0).$$

Demzufolge reduziert sich (17) auf

$$\varlimsup_{W\to\infty}\frac{1}{W}\log\left|\int_0^U\int_0^V F(u,v)\,dv\,du\right| = \varlimsup_{U\to\infty}\frac{1}{U}\log\left|\int_0^U F_1(u)du\right|,$$

da $U/W \leqq 1$ ist. Also ist die positive Konvergenzabszisse des Laplace-Integral $\int_0^\infty e^{-\lambda u}F_1(u)du$ durch

(18) $$\lambda = \varlimsup_{U\to\infty}\frac{1}{U}\log\left|\int_0^U F_1(u)du\right|$$

gegeben.

Satz 9. *Unter der Voraussetzung, daß* $\int_0^U\int_0^V F(u,v)\,dv\,du$ *für jedes* $U+V\to\infty$ *existiert, werde mit* $U+V=W$

(19) $$\varlimsup_{W\to\infty}\frac{1}{W}\log\left|\int_U^\infty\int_V^\infty F(u,v)\,dv\,du\right| = \mu$$

gesetzt. Ist $\beta<0$, *so ist* $\beta=\mu$.

Beweis. *a*) Wenn $\beta<0$ ist, so konvergiert das Laplace-Integral für $s=0$ schon $\int_0^\infty\int_0^\infty F(u,v)\,du\,dv$ und damit $\int_\omega^\infty\int_{\omega'}^\infty F(u,v)\,dv\,du = \psi(\omega,\omega')$ für $\omega,\omega'\geqq 0$ hat also einen Sinn. Überdies ist $\psi(u,v)\to 0$ für jedes $u+v=w\to\infty$, und folglich $\log|\psi(u,v)|\to-\infty$, so daß gewiß $\mu\leqq 0$ sein soll. Ferner folgt es durch partielle Integration

$$\int_0^\omega\int_0^{\omega'} e^{-(\mu+\delta)(u+v)}F(u,v)\,dv\,du$$

$$= e^{-(\mu+\delta)(\omega+\omega')}\psi(\omega,\omega') - e^{-(\mu+\delta)\omega}\psi(\omega,0) - e^{-(\mu+\delta)\omega'}\psi(0,\omega') + \psi(0,0)$$

$$+\int_0^\omega(\mu+\delta)e^{-(\mu+\delta)u}\left[e^{-(\mu+\delta)\omega'}\psi(u,\omega') - \psi(u,0)\right]du$$

$$+\int_0^{\omega'}(\mu+\delta)e^{-(\mu+\delta)v}\left[e^{-(\mu+\delta)\omega}\psi(\omega,v) - \psi(0,v)\right]dv$$

$$+\int_0^\omega\int_0^{\omega'}(\mu+\delta)^2 e^{-(\mu+\delta)(u+v)}\psi(u,v)\,dv\,du$$

$$= \mathrm{I} - \mathrm{II} - \mathrm{III} + \mathrm{IV} + \mathrm{V} + \mathrm{VI} + \mathrm{VII}.$$

Außer dem rechtwinkligem Dreieck mit gleichem Schenkel W (passend groß) glit

$$\frac{1}{w}\log|\psi(u,v)| < \mu + \frac{\delta}{2} \quad \text{für} \quad u+v=w>W,$$

also

$$|\psi(u,v)| < e^{(\mu+\frac{1}{2}\delta)w}, \quad \text{so daß} \quad e^{-(\mu+\delta)w}|\psi(u,v)| < e^{-\frac{1}{2}\delta w}.$$

Hieraus aber folgt, daß

$$|\mathrm{I}| \leqq e^{-\frac{1}{2}\delta\Omega} \to 0 \qquad \text{bei} \qquad \Omega = \omega + \omega' \to \infty.$$

Für II dasgleichen falls ω mit $\Omega \to \infty$ strebt, oder sonst bleibt als konstant. Ganz ebenso ist für III. Das letzte Integral VII für $\omega + \omega' \to \infty$, also für $\rho = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2} \to \infty$ wegen Satzes 4 hat einen Grenzwert, während für V sowie VI noch dieselben wegen Zusatzes (8) gelten. Daher gilt dasgleiche für ihrer Gesamtheit und das Integral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\mu+\delta)(u+v)} F(u,v)\, du\, dv$$

existiert. Also ist $\beta \leqq \mu$.

b) Es sei $s_1 < 0$ und $\Phi(u,v) = \int_0^u \int_0^v e^{-s_1(u+v)} F(u,v)\, dv\, du$ bei $u+v \to \infty$

jedesmal limitierbar. Folglich ist das Integral

$$\psi(\omega, \omega') = \int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty F(u,v)\, dv\, du = \int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(u+v)} \Phi_{uv}(u,v)\, dv\, du$$

sinnlich und durch partielle Integration wie folgt gegeben:

$$\psi(\omega, \omega') = \Big[\!\Big[e^{s_1(u+v)} \Phi(u,v) \Big]\!\Big]_{\omega,\omega'}^{\infty,\infty} - s_1 \int_\omega^\infty \Big[e^{s_1(u+v)} \Phi(u,v) \Big]_{\omega'}^\infty du$$

$$- s_1 \int_{\omega'}^\infty \Big[e^{s_1(u+v)} \Phi(u,v) \Big]_\omega^\infty dv + s_1^2 \int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(u+v)} \Phi(v,v)\, dv\, du.$$

Da $\Phi(\omega, \omega')$ für $u, v \geqq 0$ stetig ist und für jedes $u + v \to \infty$ limitierbar ist, so ist $|\Phi(u,v)| \leqq C$ für alle $u, v \geqq 0$. Also zunächst wegen $s_1 < 0$ strebt $e^{s_1(u+v)} \Phi(u,v) \to 0$ für $u+v \to \infty$ und demzufolge

$$\psi(\omega, \omega') = e^{s_1(\omega+\omega')} \Phi(\omega, \omega') + s_1 \int_\omega^\infty e^{s_1(u+\omega')} \Phi(u, \omega')\, du$$

$$+ s_1 \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(u+v)} \Phi(\omega, v)\, dv + s_1^2 \int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(u+v)} \Phi(u,v)\, dv\, du,$$

und weiter

$$|\psi(\omega, \omega')| \leqq C e^{s_1(\omega+\omega')} - s_1 C \int_\omega^\infty e^{s_1(u+w')} du - s_1 C \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(\omega+v)}\, dv + s_1^2 C \int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty e^{s_1(u+v)}\, dv\, du$$

$$= 4 C e^{s_1(\omega+\omega')}.$$

Deshalb ist für $\omega + \omega' = \Omega > W$ bei $\delta > 0$, zwar $|\psi(\omega, \omega')| < e^{(s_1+\delta)\Omega}$, und hieraus ergibt sich

$$\frac{1}{\Omega} \log |\psi(\omega, \omega')| < s_1 + \delta, \quad \text{also } \mu \leqq s_1 + \delta \text{ für jedes } \delta > 0.$$

Mithin $\mu \leqq s_1$. Ist die Konvergenzabszisse $\beta < 0$, so kann s_1 jede negative Zahl $> \beta$

bedeuten, und man erhält $\mu \leqq \beta$. Mit dem Ergebnis unter $a)$ zusammengenommen, liefert das $\mu = \beta$.

Zusatz 9. Es sei $\beta = \mu < 0$ in (19) und $F(u,v) = e^{(\mu-1)v} F_1(u)$. Dann gelten

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\mu(u+v)} F(u,v)\, du\, dv = \int_0^\infty e^{-\mu u} F_1(u)\, du,$$

$$\int_\omega^\infty \int_{\omega'}^\infty F(u,v)\, dv\, du = \frac{e^{(\mu-1)\omega'}}{1-\mu} \int_\omega^\infty F_1(u)\, du.$$

Folglich reduziert sich (19) auf

$$\overline{\lim_{\omega+\omega' \to \infty}} \frac{1}{\omega+\omega'} \left\{ (\mu-1)\omega' - \log(1-\mu) + \log \left| \int_\omega^\infty F_1(u) du \right| \right\},$$

in welche, um den Limes tatsächlich superior zu machen, es wie $\frac{\omega'}{\omega+\omega'} \to 0$, so daß $\frac{\omega}{\omega+\omega'} \to 1$ genommen werden soll. Daher ist die negative Konvergenzabszisse vom Laplace-Integral $\int_0^\infty e^{-\mu u} F_1(u)\, du$ durch

$$\mu = \overline{\lim_{\omega \to \infty}} \frac{1}{\omega} \log \left| \int_\omega^\infty F_1(u) du \right| (<0) \tag{20}$$

gegeben.

Satz 10. *Die Konvergenzabszisse β des Laplace-Integrals*

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} F(u,v)\, du\, dv$$

bestimmt sich allgemein aus den Zahlen λ und μ folgendermaßen: Für $\lambda > 0$ ist $\beta = \lambda$, für $\lambda < 0$ ist $\beta = \mu$, für $\lambda = 0$ ist $\beta = 0$ oder μ. Deswegen soll es $\beta = 0$ sein, falls $\lambda = \mu = 0$.

Beweis. Stellt sich $\lambda > 0$ heraus, so ist $\beta = \lambda$ nach Satz 8. Ist $\lambda < 0$, so ist $\beta \leqq \lambda < 0$ nach Satz 8, also $\beta = \mu$ nach Satz 9. Ist $\lambda = 0$, so ist $\beta \leqq 0$ nach Satz 8, also entweder $\beta = 0$, oder aber $\beta < 0$, also $\beta = \mu$ nach Satz 9. Die Entscheidung kann man durch die Probe, ob $s = \frac{\mu}{2}$ Konvergenz-oder Divergenz-punkt ist, herbeiführen.

Ersetzt man $F(u,v)$ durch $|F(u,v)|$, so erhält man entsprechende Sätze über die Abszisse α der absoluten Konvergenz.

§ 4.

Da die aus Satz 10 bestimmte Abszisse β_0 lediglich $\beta_0 = \text{Max}\,(\beta, \beta')$ gibt, so braucht man noch etwaige kleineren Abszisse zu finden. Dazu bildet man mit $\delta > 0$

$$\int_0^\infty e^{-(\beta_0+\delta)v} F(u,v)\, dv = F_1(u), \qquad \int_0^\infty e^{-(\beta_0+\delta)u} F(u,v)\, du = F_2(v)$$

und sucht nach (18) oder (20) die Konvergenz-Abszisse γ_i des Laplace-Integrals

$$\int_0^\infty e^{-\gamma w} F_i(w)\,dw \qquad (i=1,2)$$

aus. Falls $\gamma_i<\beta_0$ ist, so sind die gesuchte Konvergenz-Koordinaten (γ_1,β_0) oder (β_0,γ_2). Dabei keinerwegs können beide γ_1, $\gamma_2<\beta_0$ sein. Denn, falls beide $\gamma_1,\gamma_2<\beta_0$ sind, so sind $\beta_0-\gamma_i=\varepsilon_i>0$ $(i=1,2)$. Es sei z. B. $\varepsilon_1\leqq\varepsilon_2$ und setze man $\varepsilon_1-\varepsilon_1'=\varepsilon_2-\varepsilon_2'=\varepsilon>0$ mit $\varepsilon_i'>0$. Dazu hat man nur sie zu währen, so daß $0<\varepsilon_1'<\varepsilon_1$ und $0<\varepsilon_2'=\varepsilon_2-\varepsilon_1+\varepsilon_1'=\varepsilon_2-(\varepsilon_1-\varepsilon_1')<\varepsilon_2$. Dann gilt $\beta_0-\varepsilon=\gamma_i+\varepsilon_i-\varepsilon=\gamma_i+\varepsilon_i'>\gamma_i$, und folglich soll

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\beta_0-\varepsilon)(u+v)}F(u,v)\,du\,dv \qquad (\varepsilon>0)$$

wegen $\varepsilon_i'>0$ nach Satz 5 konvergieren, was aber Sätzes 8, 9 unmöglich sein soll.

Wir wollen schließlich einige Beispiele hinzufügen.

1. Für $F(u,v)=e^{u+v^2i}$ ist es ersichtlich $\beta=1$, $\beta'=0$. Sind nämlich $\Re s>1$, $t=0$, so ergibt sich

$$f(s,0)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}e^{u+v^2i}\,du\,dv=\int_0^\infty e^{-(s-1)u}du\int_0^\infty(\cos v^2+i\sin v^2)dv.$$

Setzt man ferner $v=\sqrt{\theta}$, so erhält man

$$f(s,0)=\frac{1}{2(s-1)}\int_0^\infty\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta=\text{konst.}$$

Um dasselbe Resultat aus (17) formal zu finden, hat man zu sehen, daß

$$\int_0^U\int_0^V e^{u+v^2i}\,dv\,du=(e^U-1)\int_0^V(\cos v^2+i\sin v^2)dv=O(e^U),$$

und damit
$$\overline{\lim_{U+V\to\infty}}\frac{1}{U+V}\log e^U=1=\beta.$$

Läßt es sich $\Re s>1$ aber $0<\Re t\leqq1$ gelten, so wird

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}e^{u+v^2i}\,du\,dv=\frac{1}{2(s-1)}\int_0^\infty e^{-t\sqrt{\theta}}\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)}{\sqrt{\theta}}\,d\theta$$

konvergent. Da aber das Integral

$$\int_0^\Theta\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\sqrt{\theta}}\,d\theta=g(\Theta)$$

für $\Theta\to\infty$ endlich und $\neq0$ ist, so ist nach (18)

$$\overline{\lim_{\Theta\to\infty}}\frac{1}{\Theta}\log|g(\Theta)|=0=\beta'.$$

Also sind die Konvergenz-Koordinaten $\beta=1$, $\beta'=0$.

2. Für $F(u,v)=(1+ui)e^{2u+v+uvi}$ ergibt sich

$$\Phi(u,v)=\int_0^V\int_0^U F(u,v)\,dv\,du=e^{2U+V}\left\{\frac{e^{2UVi}-e^{-2U}}{2+iV}-\frac{e^{-V}(1-e^{-2U})}{4}\right\}$$

und nach (17)

$$\overline{\lim_{U+V\to\infty}}\frac{1}{U+V}\log|\Phi(U,V)|=\overline{\lim_{U+V\to\infty}}\frac{2U+V+0(1)}{U+V}=2,$$

also ist $\beta_0=\mathrm{Max}(\beta,\beta')=2$. Um die etwaige kleinere Abszisse zu finden, setzt man mit $s=2+\delta$ $(\delta>0)$

$$f(s,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}(1+ui)e^{2u+v+uvi}\,dv\,du=\int_0^\infty e^{-tv}G(v)\,dv,$$

so folgt, daß

$$\int_0^V G(v)\,dv=\int_0^V e^v\left[\frac{1}{\delta-iv}+\frac{i}{(\delta-iv)^2}\right]dv,$$

und mit benutzung des zweiten Mittelwertsatzes das letztere Integral gleich $e^V O(1)$ und $\neq 0$ wird. Daher wird nach (18)

$$\beta'=\overline{\lim_{V\to\infty}}\frac{1}{V}\log\left|\int_0^V G(v)\,dv\right|=\overline{\lim_{V\to\infty}}\frac{1}{V}\log\left|e^V O(1)\right|=1.$$

Also sind die Konvergenz-Koordinaten $\beta=2$, $\beta'=1$.

3. Wir betrachten eine Erweiterung eines von Widder[6] angegebenen merkwürdigen interessanten Beispiels:

$$f(s,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tu}e^{u+v}\sin e^{u+v}\,du\,dv$$

und suchen die Konvergenz-Koordinaten zu finden.

Durch die Koordinaten-Transformation (Rotation): $u=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$, $\eta=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$ erhält man

$$f(s,s)\equiv f(s)=\int_0^\infty\int_{-\xi}^{\xi} e^{-(s-1)\sqrt{2}\xi}\sin e^{\sqrt{2}\xi}\,d\eta\,d\xi$$

$$=2\int_0^\infty \xi e^{-(s-1)\sqrt{2}\xi}\sin e^{\sqrt{2}\xi}\,d\xi=\int_1^\infty\frac{\log x\sin x}{x^s}\,dx,\qquad (x=e^{\sqrt{2}\xi}).$$

Also wird der Integrand periodisch, aber doch die Amplitude-Funktion $x^{-s}\log x$ (>0) an $x=e^{1/s}$ einen Maximumwert $1/se$ annimmt, und nachdem monoton wie $x^{-s+\delta}$ abnimmt, sofern $s>\delta>0$ ist. Daher konvergiert das letzte Integral für $\Re s>0$, wie man aus ihre Darstellung durch unendliche Reihe erkennen kann. Also erhält man $\beta=\beta'=0$, was wegen Symmetrie keine weitere Erniedrigung erlaubt. Jedoch für $\Re s>0$ hat man durch partielle Integration

$$f(s)=(1-s)\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^{s+1}}\,dx,$$

6) D.V. Widder, The Laplace Transform, 1946, p. 58.

das für $\Re s > -1$ noch konvergiert. Daher dient der letztere Ausdruck als die analytische Fortsetzung über den Rand $\Re s = 0$ hinaus bis auf $\Re s = -1$. Weiter erhält man durch nochmalige partielle Integration

$$f(s) = -(1-s)\sin 1 + (1-s^2)\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{s+2}}\,dx,$$

das für $\Re s > -2$ konvergiert, und $f(s)$ ist noch bis auf $\Re s = -2$ fortsetzbar, u.s.w. Also lautet, daß es in der ganzer Ebene keinen singulären Puukt der Funktion gibt und $f(s)$ zwar eine Ganzefunktion ist.

4. Schließlich beschäftige ich mich mit ein Beispiel negativer Konvergenzabszissen. Es sei z. B.

$$F(u,v) = u^{m-1}v^{n-1}e^{-pu-qv-uv} \qquad \text{mit} \quad m > n > 0, \quad p > q > 0.$$

Schon ist seiner Integral vorhanden, da

$$0 < \int_0^\infty\int_0^\infty F(u,v)\,du\,dv < \int_0^\infty u^{m-n-1}e^{-pu}\,du\int_0^\infty e^{-uv}(uv)^{n-1}d(uv) = \frac{\Gamma(m-n)\Gamma(n)}{p^{m-n}}$$

gilt, und demgemäß ist $\beta, \beta' \leqq 0$. Da aber die Berechnung aus Formeln bei negativer Abszisse etwas verwickelt wird, seien es Einfachheit wegen beispielsweise $m = 2$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 1$, also wird $F(u,v) = ue^{-uv-2u-v}$ und

$$\psi(U,V) = \int_U^\infty\int_V^\infty ue^{-2u}e^{-uv-v}\,dv\,du = e^{-V}\int_U^\infty ue^{-(2+V)u}\frac{du}{u+1}$$

$$= \frac{e^{-V}}{2+V}e^{-(2+V)U} - e^{-V}\int_U^\infty e^{-(2+V)u}\frac{du}{u+1}.$$

Mit benutzung des zweiten Mittelwertsatzes erhält man

$$\psi(U,V) = e^{-2U-UV}\left[e^{-V} - \log\frac{U_1+1}{U+1}\right] \qquad (0 \leqq U < U_1 < \infty),$$

und daraus wegen (19)

$$\mu = \overline{\lim_{U+V\to\infty}}\frac{1}{U+V}\log|\psi(U,V)| = \overline{\lim_{U+V\to\infty}}\frac{-2U-V-UV}{U+V}.$$

Falls beide $U, V \to \infty$ streben, so wird $\lim = -\infty$, während bei festes $U = u_0$ oder $V = v_0$, $\lim = -1-u_0$ oder $-2-v_0$, wo $0 \leqq u_0, v_0 < \infty$ sind. Daher der Limes superior $= -1$ bei $u_0 = 0$, also $\mu = -1$ sein soll. Ferner nimmt man $t = -1$ an, so folgt

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}ue^{-2u-v-uv}\,dv\,du = \int_0^\infty e^{-(s+2)u}du = \frac{1}{s+2},$$

und daraus offentlich $\beta = -2$, $\beta' = -1$.

Vielmehr mögen wir ohne Benutzung von Formeln folgendermaßen heuristisch fortfahren. Da das Integral $\int_0^\infty e^{-sx}e^{-bx}x^{a-1}\,dx$ mit $a>0$, $b>0$ für $\Re s>-b$ konvergiert aber für $\Re s<-b$ divergiert, so ist seiner Konvergenzabszisse $\beta=-b$. In unseren Falle zwar konvergiert das Laplace-Integral für $s=t=-q$, weil

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{q(u+v)}\,e^{-pu-qv-uv}u^{m-1}v^{n-1}\,du\,dv$$

$$=\int_0^\infty u^{m-n-1}e^{-(p-q)u}\,du\int_0^\infty e^{-uv}(uv)^{n-1}\,d(uv)=\frac{\Gamma(m-n)\Gamma(n)}{(p-q)^{m-n}}$$

ist, aber das für $s=t<-q-r\ (r>0)$ divergiert, also $\beta_0=\mathrm{Max}(\beta,\beta')=-q$.

Setzt man für $t=-q+\delta\,(\delta>0)$

$$f(s,t)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-tv}F(u,v)\,du\,dv=\int_0^\infty e^{-su}G(u)\,du$$

mit

$$G(u)=\int_0^\infty e^{-tv}F(u,v)\,dv,$$

so gilt

$$G(u)=\int_0^\infty e^{(q-\delta)v}F(u,v)\,dv=\int_0^\infty u^{m-1}v^{n-1}e^{-pu-\delta v-uv}\,dv=\frac{\Gamma(n)u^{m-1}e^{-pu}}{(u+\delta)^n},$$

und daraus folgt

$$f(s,-q+\delta)=\Gamma(n)\int_0^\infty e^{-(s+p)u}\frac{u^{m-1}}{(u+\delta)^n}\,du,$$

dessen Konvergenzabszisse gefunden zu werden braucht. Es ist nun evident, daß das letztere Integral konvergiert oder divergiert, jenachdem $\Re s>$ oder $<-p$ ist. Daher $\beta=-p$, $\beta'=-q$, was eben zu finden war.