

ÜBER DIE LAPLACESCHE ASYMPTOTISCHE FORMEL FÜR DAS INTEGRAL VON POTENZE MIT GROSSEM INDEXE

Von

Yoshihiro ICHIJÔ

(Eingegangen am 30, 1955)

§ 1

Wir wollen eine bekannte Laplacesche Formel verallgemeinern wie der

Satz 1. Die reellen Funktionen $\varphi(x) \equiv \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m)$ und $f(x) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ seien in $B: (a_i \leq x_i \leq b_i; i = 1, 2, \dots, m)$ Teilbereiche m -dimensionalen Euklidischen Raumes definiert und dem folgenden Bedingungen unterworfen:

1° Die Funktionen $f(x) \geq 0$ und $\varphi(x) \cdot [f(x)]^n$ ($n = 1, 2, \dots$) seien absolut integrierbar in B .

2° $F(x) = \log f(x)$ sei regular innerhalb B , also in der Umgebung W_2 einer Stelle ξ im Innern von B in Taylorsche Reihe entwickelbar, und sogar dort erreiche ihr Maximum in starken Sinn, d. h. quadratische Glieder in dortige Taylorsche Reihe bilden eine negative definite quadratische Form.

3° $\varphi(x)$ erlaube auch Taylorsche Entwicklung in W und sei $\varphi(\xi) \neq 0$.

Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ die folgende asymptotische Formel¹⁾:

$$(1) \quad \int_{a_m}^{b_m} \int_{a_{m-1}}^{b_{m-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) [f(x_1, x_2, \dots, x_m)]^n dx_1 dx_2 \dots dx_m \\ \cong \frac{(2\pi/n)^{m/2}}{\sqrt{(-1)^m D}} [f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)]^n \{ \varphi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) + O(1/n) \}$$

wobei

$$(2) \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}, \quad a_{ij} = \left[\frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_k = \xi_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Beweis. Betrachte man einen m -dimensionalen offenen innerhalb B liegenden

¹⁾ Für $m=1$ lautet

$$\int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx \cong \sqrt{\frac{2\pi}{-nF''(\xi)}} \cdot [f(\xi)]^n \cdot [\varphi(\xi) + O(1/n)]$$

die bekannte Laplacesche Formel (vgl. Pólya und Szegő, Aufgaben und Lehrsätze, Bd. I, S. 78 und S. 244.)

Würfer W_0 von der Kantenlänge 2δ , ξ als Mittelpunkt, so erreiche die Funktion $F(x) - F(\xi)$ im abgeschlossenen Bereich $B - W_0$ ein maximum Wert ($< \rho$), und deshalb $\exp \{F(x) - F(\xi)\}$ auch ein maximum wert ρ , wo $0 < \rho < 1$ ist. Setzt man

$$(3) \quad \int_B \cdots \int \varphi(x) \exp \{n[F(x) - F(\xi)]\} dx_1 \cdots dx_m = \int_{W_0} \cdots \int + \int_{B-W_0} \cdots \int = (i) + (ii)$$

so erhält man

$$|(ii)| < \rho^n \int_{B-W_0} \cdots \int |\varphi(x)| dx_1 \cdots dx_m = O(\rho^n) = o\left(\frac{1}{n^\omega}\right),$$

bei genügend großes n , wieviel groß (jedoch bestimmt) ω genommen werden mag. Daher hat man nur (1) allein zu abschätzen. Dazu schreibe man

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(\xi) + \sum_{i=1}^m (x_i - \xi_i) \varphi_i(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) \varphi_{ij}(x'), \\ F(x) &= F(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) F_{ij}(\xi) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) (x_k - \xi_k) F_{ijk}(\xi) \\ &\quad + \frac{1}{24} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) (x_k - \xi_k) (x_l - \xi_l) F_{ijkl}(x''), \end{aligned}$$

wobei

$$\varphi_{ij}(x') = \left[\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_k = x'_k} \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

mit

$$x'_k = \xi_k + \vartheta'_k (x_k - \xi_k) \quad , \quad 0 < \vartheta'_k < 1$$

und

$$F_{ijkl}(x'') = \left[\frac{\partial^4 F(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \right]_{x_p = x''_p} \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

mit

$$x''_p = \xi_p + \vartheta''_p (x_p - \xi_p) \quad , \quad 0 < \vartheta''_p < 1.$$

Nach Annahme, daß $F(x)$ am Punkte ξ ein stärke Maximum hat, soll die quadratische Form $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (x_i - \xi_i) (x_j - \xi_j) F_{ij}(\xi)$ definit negativ sein und folglich

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Insbesondere ist bei $k=m$, $D_m = D$ und $(-1)^m \cdot D > 0$. Wenn man neue Integrationsvariablen $u_1, \dots, u_m$ dadurch einführt, daß

$$N^2 = (-1)^m D \frac{n}{2} \quad (N > 0) \quad \text{und} \quad x_i - \xi_i = \frac{u_i}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

so geht

$$\begin{aligned} (5) \quad (i) &= \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} \left\{ \varphi(\xi) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi) \cdot u_i + \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \varphi_{ij}(x') \cdot u_i \cdot u_j \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{(-1)^m}{D} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot u_i \cdot u_j + \frac{n}{6N^3} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \varphi_{ijk}(\xi) \cdot u_i \cdot u_j \cdot u_k \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{n}{24N^4} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m F_{ijkl}(x'') u_i u_j u_k u_l \left\} \frac{du_1 du_2 \dots du_m}{N^m}.$$

Bezeichnen wir nun den ersten Faktor des Integrandes von (5) mit A , und den zweiten mit $\exp B$, und weiter sukzessiven Glieder in B mit B_1, B_2, B_3 , so daß

$$\exp B = \exp B_1 \exp B_2 \exp B_3,$$

$$\exp B_2 = 1 + B_2 + \dots = 1 + \frac{n}{6N^3} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m F_{ijk}(\xi) u_i u_j u_k + \dots,$$

$$\exp B_3 = 1 + \dots,$$

so ergibt sich

$$A \exp B = \varphi(\xi) \exp B_1 \cdot \left[1 + \frac{1}{N\varphi(\xi)} \sum_i \varphi_i(\xi) \cdot u_i \right. \\ \left. + \frac{1}{2N^2\varphi(\xi)} \sum_i \sum_j \varphi_{ij}(x') \cdot u_i u_j \right] \cdot [1 + B_2 + \dots] \cdot [1 + \dots]$$

Da aber die sämtlichen Zahlen... unten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ herab sinken, mögen diese zwar vernachlässigt werden,²⁾ und haben wir

$$(6) \quad A \exp B = \varphi(\xi) \exp B_1 \left[1 + \frac{1}{N\varphi(\xi)} \sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi) u_i \right. \\ \left. + \frac{n}{6N^3} \sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk}(\xi) u_i u_j u_k + R_1 + R_2 + R_3 \right]$$

wobei

$$R_1 = \frac{1}{2N^2\varphi(\xi)} \sum_i \sum_j \varphi_{ij}(x') u_i u_j,$$

$$R_2 = \frac{B_2}{2N^2\varphi(\xi)} \sum_i \sum_j \varphi_{ij}(x') u_i u_j = \frac{n}{12N^5\varphi(\xi)} \left[\sum_i \sum_j \varphi_{ij}(x') u_i u_j \right] \left[\sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk}(\xi) u_i u_j u_k \right]$$

und

$$R_3 = \frac{B_2}{N\varphi(\xi)} \sum_i \varphi_i(\xi) u_i = \frac{n}{6N^4\varphi(\xi)} \left[\sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk}(\xi) u_i u_j u_k \right] \cdot \left[\sum_i \varphi_i(\xi) u_i \right].$$

Gesetzt hier $c_{ij} = (-1)^{m+1} a_{ij}/D$ so lautet

$$B_1 = \frac{(-1)^m}{D} \sum_i \sum_j a_{ij} u_i u_j = - \sum_i \sum_j c_{ij} u_i u_j \equiv -c_1$$

und folglich wird C_1 eine positive definite quadratische Form. Es seien die Matrix

²⁾ Freilich bei Annäherung an $\pm N\delta$ zunehmen diese bis auf $O(n)$ und die Vernachlässigungen scheinen als zweifelhaft. Trotzdem noch existieren und bleiben beschränkt die Integralen

$$\int_{-N\delta}^{N\delta} \dots \int_{-N\delta}^{N\delta} u_i \cdot u_j \cdot \exp B_1 du_1 \dots du_m$$

etc., wie nachträglich gezeigt werden wird, z.B. ist für B_2 wegen

$$\frac{n}{6N^3} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad \frac{1}{2} B_2^2 + \frac{1}{3} |B_2^3| + \dots < K \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + \dots \right] = \frac{K}{n - \sqrt{n}},$$

wo K die obere Grenze gewissen Polynome von $u_1, u_2, \dots, u_m$ in $\mathcal{W}_0$ bedeutet und endlich bleibt, und folglich wird das Integral noch $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

$C=(c_{ij})$ und ihre Determinante $c=|c_{ij}|$ so daß

$$c_1 = (u_1, u_2, \dots, u_m) (c_{ij}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}.$$

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ die Wurzeln der charakteristische Gleichung $|C-\lambda E|=0$, welche sämtlich reel und sogar positiv sein sollen, weil $c_{ij}=c_{ji}$ und alle c_{ij} reel und $c \neq 0$, und sogar c_1 definit-positiv ist. Es gibt folglich derartige orthogonale Matrix

$$T = (\tau_{ij}), \quad |T| = 1$$

daß bei linearen Transformation

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ \vdots \\ u'_m \end{pmatrix}$$

die quadratische Form c_1 in die Form

$$\lambda_1 u_1'^2 + \lambda_2 u_2'^2 + \dots + \lambda_m u_m'^2$$

übergeht. Dabei reduziert der Jacobien der Transformation

$$J = \frac{\partial(u_1, \dots, u_m)}{\partial(u'_1, \dots, u'_m)} = |\tau_{ij}| = 1.$$

Daher verwandelt das Integral sich

$$\begin{aligned} \int_{-N\delta}^{N\delta} \dots \int_{-N\delta}^{N\delta} \exp B_1 du_1 \dots du_m &= \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \dots \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \exp \left\{ - \sum_i \lambda_i u_i'^2 \right\} du'_1 \dots du'_m \\ &= \prod_{i=1}^m \int_{-\alpha_i}^{\alpha_i} \exp \left\{ - \lambda_i u_i'^2 \right\} du'_i, \end{aligned}$$

wobei α_i die u'_i -Ordinate derjenigen Punktes bedeutet, woran die u'_i -Achse mit Wurfelfläche $|u_j|=N\delta$ durchschneidet, und folglich bei wachsendem n auch zu ∞ strebt. Daher strebt das obige Integral gegen

$$\prod_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \lambda_i u_i'^2 \right\} du'_i + O\left(\frac{1}{n^\omega}\right) = \prod_{i=1}^m \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} + O\left(\frac{1}{n^\omega}\right)$$

Es ist aber

$$T^{-1}CT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

und deswegen

$$|c_{ij}| = \prod_{i=1}^m \lambda_i = \left(\frac{(-1)^{m+1}}{D} \right)^m \cdot |a_{ij}| = D^{-m+1}.$$

Also erhält man

$$(7) \quad \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} \exp B_1 du_1 \cdots du_m \cong \pi^{\frac{m}{2}} D^{\frac{m-1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^\omega}\right)$$

bei $n \rightarrow \infty$. Aus dieserben Betrachtung folgen auch sowohl

$$(8) \quad \begin{aligned} & \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} \exp B_1 \cdot \sum_{i=1}^m \varphi_i(\xi) \cdot u_i du_1 \cdots du_m \\ &= \sum_i \varphi_i(\xi) \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} u_i \exp B_1 du_1 \cdots du_m \\ &= \sum_i \varphi_i(\xi) \sum_k \tau_{ik} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \cdots \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} u'_k \exp \left\{ - \sum_j \lambda_j u_j'^2 \right\} du'_1 \cdots du'_m \\ &= 0 \end{aligned}$$

als

$$(9) \quad \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} \exp B_1 \sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk}(\xi) u_i u_j u_k du_1 \cdots du_m = 0.$$

Es bleibt noch Integrale der Restgliedern in (6) zu abschätzen. Zunächst

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} \exp B_1 \cdot R_1 \cdot du_1 \cdots du_m \right| \\ & \leq \frac{1}{2N^2 |\varphi(\xi)|} \sum_i \sum_j \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} |\varphi_{ij}(x') u_i u_j| \exp B_1 du_1 \cdots du_m \\ & \leq \frac{M}{2N^2 |\varphi(\xi)|} \sum_i \sum_j \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} |u_i| |u_j| \exp B_1 du_1 \cdots du_m \\ & = \frac{M}{2N^2 |\varphi(\xi)|} \sum_i \sum_j \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \cdots \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} \left| \sum_k \sum_l \tau_{ik} \tau_{jl} u'_k u'_l \right| \exp \left[- \sum_p \lambda_p u_p'^2 \right] du'_1 \cdots du'_m. \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u'_k u'_l| \exp \left\{ - \sum_p \lambda_p u_p'^2 \right\} du'_1 \cdots du'_m \\ &= 4 \int_0^{\infty} u'_k \exp \left\{ - \lambda_k u_k'^2 \right\} du'_k \cdot \int_0^{\infty} u'_l \exp \left\{ - \lambda_l u_l'^2 \right\} du'_l \cdot \prod_{p \neq k, l}^m \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \lambda_p u_p'^2 \right\} du'_p \end{aligned}$$

beschränkt bleibt, so gilt

$$(10) \quad \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} (\exp B_1) R_1 du_1 \cdots du_m = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ganz ebenso erhält man

$$(11) \quad \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} (\exp B_1) R_2 du_1 \cdots du_m = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$(12) \quad \int_{-N\delta}^{N\delta} \cdots \int_{-N\delta}^{N\delta} (\exp B_1) R_3 du_1 \cdots du_m = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Zusammengesetzt (4), (5) und (7)–(12), resultiert es, daß

$$\int \cdots \int_B \varphi(x) \cdot \exp \{n(F(x) - F(\xi))\} dx_1 \cdots dx_m \cong \frac{(2\pi/n)^{m/2}}{\sqrt{(-1)^m D}} \left\{ \varphi(\xi) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\{f(\xi)\}^n$, so kommt die Formel (1) sogleich.

Bemerkung. Wenn es mehrere Maxima, etwa an den Punkte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ geben, so braucht man den entsprechenden Wert (1) an jedem Punkt ξ_i zu schreiben und alle diese zu zusammenaddieren.

Satz 2. Die Funktionen $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ und $f(x) = f(x_1, \dots, x_m)$ seien in B ($a_i \leq x_i \leq b_i$; $i = 1, 2, \dots, m$) definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen:

1° $f(x) \geq 0$ und $\varphi(x)[f(x)]^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) seien absolut integrierbar in B .

2° Die Funktion $F(x) = \log f(x)$ erreiche denselben maximalen Wert K langs gewisser Kurve C in B : $x_1 = x_1, x_2 = g_2(x_1), \dots, x_m = g_m(x_1)$, ($a_1 \leq \alpha \leq x_1 \leq \beta \leq b$) aber in jedem Hyperplne $x_1 = \text{Konst.}$ werde $F(x)$ am Punkte ($x_1 = \text{Konst.}, x_2 = g_2(x_1), \dots, x_m = g_m(x_1)$) maximal in stärke Sinn, und in der Umgebung dieses Punktes ihre Taylorsche Entwicklung möglich.

3° $\varphi(x)$ erlaube auch Taylorsche Entwicklung in der Nähe von C .

Dann besteht

$$(13) \quad \int \cdots \int_B \varphi(x) [f(x)]^n dx_1 \cdots dx_m \cong \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{m-1}{2}} K^n \left[\int_a^\beta \frac{\varphi(x_1, g_2(x_1), \dots, g_m(x_1))}{\sqrt{(-1)^{m-1} D}} dx_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

wobei

$$(14) \quad D = |a_{ij}|, \quad a_{ij} = \left[\frac{\partial^2 F(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_k = g_k(x_1)} \quad (2 \leq i, j \leq m).$$

Beweis. Gemäß Bedingungen 1° und 2°

$$\begin{aligned} & \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x) [f(x)]^n dx_1 \cdots dx_m \\ &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \left[\int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x_1, \dots, x_m) \right] [f(x_1, \dots, x_m)]^n dx_1 \cdots dx_m = \int_{a_1}^{b_1} I(x_1) dx_1 \end{aligned}$$

Dabei

$$I(x_1) = \int_{a_m}^{b_m} \cdots \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x) [f(x)]^n dx_2 \cdots dx_m \quad (x_1 = \text{fest})$$

zwar genügt Bedingungen des Satzes 1 und daraus folgt

$$I(x_1) \cong \frac{(2\pi/n)^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{(-1)^{m-1} D}} K^n \left[\varphi(x_1, g_2(x_1), \dots, g_m(x_1)) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad \alpha \leq x_1 \leq \beta$$

Da aber für $a_1 \leq x_1 < \alpha$ oder $\beta < x_1 \leq b_1$ ebenso wie (4), $I(x_1) = O\left(\frac{1}{n^\omega}\right)$ ist, so erhalten wir sofort (13).

Wiederholt man den Gebrauch des *Satzes 2*, so erhält man den

Satz 3. Die Funktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ seien in $B \subset R^m$ definiert, und

1° $f(x) > 0$, $\varphi(x)[f(x)]^n$ seien absolut integabel in B ;

2° Die Funktion $F(x) = \log f(x)$ erreiche demselben maximal Wert K in schwachen Sinn an sämtliche Punkte einer innerhalb B enthaltenen p -dimensionalen Fläche S ($p < m$), und erlaube in der Nahe $\mathcal{W}$ von S ihre Taylorsche Entwicklung; aber, wenn $x_1, x_2, \dots, x_p$ als fest in S bestimmt werden, so erreiche $F(x)$ als Funktion von $m-p$ Veränderlichen $x_{p+1}, \dots, x_m$ ihre Maximum K in starken Sinn am Punkt

$$x_{p+1} = g_{p+1}(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, x_m = g_m(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

3° $\varphi(x)$ erlaube Taylorsche Entwicklung in $\mathcal{W}$.

Dann gilt

$$(15) \quad \int_B \dots \int_B \varphi(x) [f(x)]^n dx_1 \dots dx_m \simeq \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\frac{m-p}{2}} K^n \cdot \left[\int_B \dots \int_B \frac{\varphi(x_1, \dots, x_p, g_{p+1}, \dots, g_m)}{\sqrt{(-1)^{m-p} D}} dx_1 \dots dx_p + O\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

wobei

$$g_j = g_j(x_1, \dots, x_p), \quad D = |a_{ij}|$$

$$a_{ij} = \left[\frac{\partial^2 F(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_m)}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x_k = g_k} \quad p+1 \leq i, j \leq m.$$

$$(k=p+1, \dots, m)$$

§ 2

Wir wollen nächstens das in *Satz 1* erhaltenen $O\left(\frac{1}{n}\right)$ für den Fall $m=1$ oder 2 ausführlich ausrechnen. Bei $m=2$ sei $au^2 + 2buw + cv^2$ eine positive definite quadratische Form mit Determinante

$$D' = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0,$$

und braucht man den Wert des Integrales

$$(16) \quad J_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^m \cdot v^n \cdot \exp\{-au^2 + 2buw + cv^2\} du dv$$

zu abschätzen, Nach einfacher Rechnung schließt man, daß

$$(17) \quad J_{m,n} = 0 \quad \text{falls } m+n = \text{ungerad},$$

während, falls $m+n = \text{gerad}$, also m, n beide gerad oder ungerad sind,

$$(18) \quad J_{2m', 2n'} = \sum_{p=0}^{m'} \binom{2m'}{2p} a^{n'-m'} \cdot b^{2p} \frac{\pi}{(D')^{n'+p-1/2}} \cdot \frac{(2m'-2p+1) \dots 3 \cdot 1 \cdot (2n'+p-1) \dots 3 \cdot 1}{2^{m'+n'}}$$

$$(19) \quad J_{2m'+1, 2n'-1} = - \sum_{p=0}^{m'} \binom{2m'+1}{2p+1} a^{m'+n'-1} b^{2p+1} \frac{\pi}{(D')^{n'+p+1/2}} \cdot \frac{(2m'-2p-1)(2m'-2p-3) \dots 3 \cdot 1 \cdot (2n'+2p-1)(2n'+2p-3) \dots 3 \cdot 1}{2^{m'+n'}}$$

gelten. In Satz 1 seien die betreffenden Funktionen $\varphi(x, y)$, $f(x, y)$ und $F(x, y) = \log f(x, y)$, so daß

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(\xi, \eta) + \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \varphi(\xi, \eta) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 \varphi(\xi, \eta) + \frac{1}{3} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^3 \varphi(x', y') \\ F(x, y) - F(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 F(\xi, \eta) + \frac{1}{3} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^3 F(\xi, \eta) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^4 F(\xi, \eta) + \frac{1}{5} \left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^5 F(x'', y'') \end{aligned}$$

wobei (x', y') so wie (x'', y'') gewisse zwischene Punkte ausdrücken. Ferner setze man

$$x - \xi = u/N, \quad y - \eta = v/N, \quad \text{mit} \quad N = \sqrt{nD(\xi, \eta)/2},$$

wobei

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx}(x, y), & F_{xy}(x, y) \\ F_{yx}(x, y), & F_{yy}(x, y) \end{vmatrix},$$

und

$$D(\xi, \eta) > 0,$$

weil $\left\{ (x-\xi) \frac{\partial}{\partial x} + (y-\eta) \frac{\partial}{\partial y} \right\}^2 F(\xi, \eta)$ eine negative definite quadratische Form ist.

In ähnlicher Weise wie (3) zerlegt man das Integrationsbereich

$$(20) \quad \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varphi(x, y) \exp \{n[F(x, y) - F(\xi, \eta)]\} dx dy = \iint_W + \iint_{B-W} \equiv (i) + (ii),$$

so strebt (i) gegen $O\left(\frac{1}{n^w}\right)$ nach (4), und deswegen hat man nur (ii) zu betrachten.

Wird dies ausführlich geschlossen, so

$$\begin{aligned} (i) &= \int_{-N\delta}^{N\delta} \int_{-N\delta}^{N\delta} \left[\varphi(\xi, \eta) + \frac{1}{N} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \varphi(\xi, \eta) + \frac{1}{2N^2} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi(\xi, \eta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6N^3} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F(\xi, \eta) \right] \cdot \exp \left[\frac{n}{2N^2} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F(\xi, \eta) + \frac{n}{6N^3} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 F(\xi, \eta) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{n}{24N^4} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 F(\xi, \eta) + \frac{n}{120N^5} \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^5 F(x'', y'') \Big] \frac{dudv}{N^2}$$

Der Kürze halber bezeichne man den ersten und zweiten Faktor des Integrandes mit A und $\exp B$ bzw., und weiter

$$A = \varphi(\xi, \eta) [1 + A_1 + A_2 + A_3], \quad \exp B = \exp B_1 \cdot \exp B_2 \cdot \exp B_3 \cdot \exp B_4.$$

Erstens

$$B_1 = D(\xi, \eta)^{-1} \left\{ F_{xx}(\xi, \eta) \cdot u^2 + 2F_{xy}(\xi, \eta) u \cdot v + F_{yy}(\xi, \eta) v^2 \right\},$$

was wegen Bedingung 2° negativ definit ist, und folglich wird

$$(21) \quad -B_1 = au^2 + 2buw + cv^2 \quad \text{mit} \quad a = \frac{-F_{xx}(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)}, \quad b = \frac{-F_{xy}(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)}, \quad c = \frac{-F_{yy}(\xi, \eta)}{D(\xi, \eta)},$$

eine positive definite quadratische Form. Daher hat man

$$(22) \quad D' = ac - b^2 = \frac{F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{xy}^2}{[D(\xi, \eta)]^2} = \frac{1}{D(\xi, \eta)} > 0 \quad \text{und} \quad a < 0, \quad c < 0.$$

Zweitens ist³⁾

$$\exp B_2 = 1 + B_2 + \frac{1}{2} B_2^2 + \dots, \quad \exp B_3 = 1 + B_3 + \dots, \quad \exp B_4 = 1 + \dots,$$

und deshalb³⁾

$$\exp B = \exp B_1 [1 + B_2 + \frac{1}{2} B_2^2 + B_3 + B_2 B_3 + \frac{1}{2} B_2^2 \cdot B_3 + \dots].$$

Folglich gilt³⁾

$$A \exp B = \varphi(\xi, \eta) \cdot \exp B_1 [1 + B_2 + \frac{1}{2} B_2^2 + B_3 + A_1 + A_1 B_2 + A_2 + R_1 + R_2]$$

wobei

$$R_1 = B_2 B_3 + \frac{1}{2} B_2^2 B_3 + \frac{1}{2} B_2^2 A_1 + A_1 B_2 + A_1 B_2 B_3 + \frac{1}{2} B_2^2 B_3 A_1 \\ + A_2 B_2 + \frac{1}{2} A_2 B_2^2 + A_2 B_3 + A_2 B_2 B_3 + \frac{1}{2} A_2 B_2^2 A_3,$$

und

$$R_2 = A_3 [1 + B_2 + \frac{1}{2} B_2^2 + B_3 + B_2 B_3 + \frac{1}{2} B_2^2 B_3 + \dots].$$

Es ist aber

$$\int_{-N\delta}^{N\delta} \int_{-N\delta}^{N\delta} R_1 \exp B_1 \, dudv = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

wie man mit Benutzung von (17), (18), (19) leicht bestätigen kann: z.B., da, B_2 , B_3 ein Polynom fünften Grades ist, schon verschwindet sein Integral wegen (17); auch für $A_2 \cdot A_3$ gilt

³⁾ Hier sind die Zahlen... vernachlässigbar, da, wegen denselben Grunde wie unter Fußnote 2) geschließt worden ist, die Reste $\leq O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$. Im jetzigen Falle soll der Koeffizient von $O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ zwar $u^m \cdot v^n$ mit ungerades $m+n$ sein, und das betreffende Integral verschwinden, so daß ... sogar bis zu $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ herabsinken.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_2 B_3 \exp B_1 du \cdot dv \\ &= \frac{n}{24N^6} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \varphi(\xi, \eta) \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 F(\xi, \eta) \right] \exp B_1 budv \end{aligned}$$

dessen Integrand ein Polynom sechsten Grades als Faktor enthält und nach (18) wird das Integral $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Sowohl auch gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_2 \cdot \exp B_1 dudv = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

und wegen (17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_2 \cdot \exp B_1 dudv = O, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_1 \exp B_1 dudv = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

Daher, wenn man diejenigen als $O\left(\frac{1}{n}\right)$ bleibenden Glieder zussammenschreibt, so

$$(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[G(x, y) \exp B_1 dudv + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \frac{\varphi(\xi, \eta)}{N^2}$$

wobei

$$\begin{aligned} G(x, y) &= 1 + A_2 + A_1 B_2 + B_2 + \frac{1}{2} B_2^2 \\ &= 1 + \frac{1}{nD\varphi(\xi, \eta)} \{ \varphi_{xx} u^2 + 2\varphi_{xy} uv + \varphi_{yy} v^2 \} + \frac{1}{6D^2 n \varphi(\xi, \eta)} [(\varphi F_{xxxx} + 4\varphi_x F_{xxx}) u^4 \\ &\quad + (3\varphi F_{xxx y} + 12F_{xxy} \varphi_x + 4F_{xxx} \varphi_y) u^3 v + (6F_{xxy y} \varphi + 12F_{xyy} \varphi_x + 12F_{xxy} \varphi_y) u^2 v^2 \\ &\quad + (3\varphi F_{xyy y} + 4F_{yy y} \varphi_x + 12F_{xyy} \varphi_y) u v^3 + (\varphi F_{yyy y} + 4F_{yyy} \varphi_x) v^4] \\ &\quad + \frac{1}{9D^3 n} [F_{xxx}^2 u^6 + 6F_{xxx} u^5 v + (9F_{xxy}^2 + 6F_{xxx} F_{yyy}) u^4 v^2 + (2F_{xxx} F_{yyy} + 18F_{xxy} F_{xyy}) u^2 v^3 + \\ &\quad (9F_{xyy}^2 + 6F_{xxy} F_{yyy}) u^2 v^4 + 6F_{xyy} F_{yyy} u v^5 + F_{yyy}^2 v^6]. \end{aligned}$$

Alle diese zussammengefasst, kann man den wert des Integrales (20) ausfinden, wir folgt.

$$\begin{aligned} & \iint \varphi(x, y) \exp [n(F(x, y) - F(\xi, \eta))] dx dy \\ & \simeq \frac{\varphi(\xi, \eta)}{N^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp B_1 dudv + \frac{1}{n} M + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\varphi D} \left[\varphi_{xx} \left\{ \frac{\pi}{2a(D')^{1/2}} + \frac{b^2 \pi}{2a(D')^{3/2}} \right\} - 2\varphi_{xy} \frac{b\pi}{2(D')^{3/2}} + \varphi_{yy} \frac{a\pi}{2(D')^{3/2}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{6D^2 \varphi} \left[(\varphi F_{xxxx} + 4\varphi_x F_{xxx}) \left\{ \frac{3}{4} \frac{\pi}{a^2} \frac{1}{(D')^{1/2}} + \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^2} \frac{\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{b^4}{a^2} \frac{\pi}{(D')^{5/2}} \right\} \right. \\ &\quad \left. - (3\varphi F_{xxx y} + 12F_{xxy} \varphi_x + 4F_{xxx} \varphi_y) \left\{ \frac{3}{4} \frac{b}{a} \frac{\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{b^3}{a} \frac{\pi}{(D')^{5/2}} \right\} + (6\varphi F_{xxy y} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 12\varphi_x F_{xyy} + 12F_{xxy} \varphi_y \left\{ \frac{1}{4} \frac{\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{3}{4} b^2 \frac{\pi}{(D')^{5/2}} \right\} - (3\varphi F_{xyyy} + 4\varphi_x F_{yyy} \\
& + 12\varphi_y F_{yyy}) \frac{3}{4} ab \frac{\pi}{(D')^{5/2}} + (\varphi F_{xyyy} + 4F_{xyy} \varphi_y) \frac{3}{4} \frac{\pi}{a^2 (D')^{3/2}} \left] - \frac{1}{9D^3} \right. \\
& \times \left[F_{xxx}^2 \left\{ \frac{15}{8} \frac{\pi}{a^3} \frac{1}{(D')^{1/2}} + \frac{45}{8} \frac{b^2}{a^3} \frac{\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{45}{8} \frac{b^4}{a^3} \frac{\pi}{(D')^{5/2}} + \frac{15}{8} \frac{b^6}{a^3} \frac{\pi}{(D')^{7/2}} \right\} \right. \\
& - 6F_{xxx} \cdot F_{xxy} \left\{ \frac{15}{8} \frac{ab\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{30}{8} \frac{a b^3 \pi}{(D')^{5/2}} + \frac{15}{8} \frac{ab^5 \pi}{(D')^{7/2}} \right\} + (9F_{xxy}^2 + 6F_{xxx} F_{xyy}) \\
& \times \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{a} \frac{\pi}{(D')^{3/2}} + \frac{18}{8} \frac{b^2}{a} \frac{\pi}{(D')^{5/2}} + \frac{15}{8} \frac{b^4}{a} \frac{\pi}{(D')^{7/2}} \right\} - (2F_{xxx} F_{yyy} + 18F_{xxy} F_{xyy}) \\
& \times \left\{ \frac{9}{8} \frac{a^2 b \pi}{(D')^{5/2}} + \frac{15}{8} \frac{a^2 b^3 \pi}{(D')^{7/2}} \right\} + (9F_{yyy}^2 + 6F_{xxy} F_{yyy}) \left\{ \frac{3}{8} \frac{a\pi}{(D')^{5/2}} + \frac{30}{8} ab^2 \frac{\pi}{(D')^{7/2}} \right\} \\
& \left. - \frac{9}{4} F_{xyy} F_{yyy} \frac{a^2 b \pi}{(D')^{7/2}} + F_{yyy}^2 \frac{15}{8} \frac{\pi}{a^3} \frac{1}{(D')^{1/2}} \right].
\end{aligned}$$

Es ist nach (7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp B_1 du dv = \sqrt{\pi} D$$

und, noch mit Benutzung von (21) (22), kann das Resultat folgendermaßen formuliert werden.

Satz 4. Das Integral (1) des Satzes 1. bei $m=2$, ausgerechnet genau bis zu $O\left(\frac{1}{n}\right)$, lautet

$$(23) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) [f(x, y)]^n dx dy \cong \frac{2\pi [f(\xi, \eta)]^n}{n \sqrt{D(\xi, \eta)}} \left[\varphi(\xi, \eta) + \frac{1}{n} \psi(\xi, \eta) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

wobei

$$\begin{aligned}
\psi(\xi, \eta) = & \left[-\frac{1}{2} \frac{\varphi_{xx}}{F_{xx}} + \frac{1}{8} (\varphi F_{xxxx} + 4\varphi_x F_{xxx}) \frac{1}{F_{xx}^2} + \frac{5}{24} F_{xxx}^2 \frac{\varphi}{(F_{xx})^3} \right] \\
& + \frac{1}{D} \left[-\frac{\varphi_{xy}}{2} \cdot \frac{F_{xy}}{F_{xx}} + \varphi_{xy} F_{xy} - \varphi_{yy} F_{xx} + \frac{F_{xy}^2}{4F_{xx}^2} (\varphi F_{xxxx} + 4\varphi_x F_{xxx}) - \frac{1}{2} \frac{F_{yy}}{F_{xx}} \left(\frac{3}{4} \varphi F_{xxx} \right. \right. \\
& + 3F_{xxy} \varphi_x + F_{xxx} \varphi_y \Big) + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{2} F_{xxyy} + \varphi_x F_{xyy} + F_{xxy} \varphi_y \right) + \frac{5}{8} \frac{F_{xy}^2}{F_{xx}^3} F_{xxx}^2 \cdot \varphi \\
& + \frac{1}{24} (9F_{xxy}^2 + 6F_{xxx} F_{xyy}) \frac{\varphi}{F_{xx}} \Big] + \frac{1}{D^2} \left[-\frac{F_{xy}^3}{2F_{xx}} \left(\frac{3}{4} \varphi F_{xxx} + 3F_{xxy} \varphi_x + F_{xxx} \varphi_y \right) \right. \\
& + \frac{1}{8} \frac{F_{xy}^4}{F_{xx}^2} (\varphi F_{xxxx} + 4\varphi_x F_{xxx}) + \frac{3}{2} F_{xy}^2 \left(\frac{1}{2} \varphi F_{xxyy} + \varphi_x F_{yyy} + F_{xxy} \varphi_y \right) \\
& - \frac{1}{2} F_{xx} F_{xy} \left(\frac{3}{4} \varphi F_{xyyy} + \varphi_x F_{yyy} + 3F_{xxy} \varphi_y \right) + \frac{1}{2F_{xx}^2} (\varphi F_{yyy} + F_{yyy} \varphi_y) \\
& + \frac{5}{8} \frac{F_{xy}^4}{F_{xx}^3} F_{xxx}^2 \varphi + \frac{3}{4} \frac{F_{xy}^2}{F_{xx}} (3F_{xxy}^2 + 2F_{xxx} F_{xyy}) \varphi + \frac{F_{xx}}{8} (3F_{yyy}^2 + 2F_{xxy} F_{yyy}) \varphi \Big] \\
& + \frac{1}{D^3} \left[\frac{5}{24} \frac{F_{xy}^6}{F_{xx}^3} F_{xxx}^2 \varphi + \frac{5}{24} \frac{F_{yyy}^2}{F_{xx}^3} + \frac{5}{8} \frac{F_{xy}^4}{F_{xx}} (3F_{xxy}^2 + 2F_{xxx} F_{xyy}) \varphi \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{4} F_{xx} F_{xy}^3 (F_{yy}^2 + F_{xxy} F_{yyy}) + \frac{9}{32} F_{xx}^2 F_{xy}^2 F_{xxy} F_{yyy} \Big] \\
& + \frac{1}{D^4} \Big[\frac{5}{4} F_{xxx} F_{xxy} F_{xx} F_{xy} \varphi + \frac{1}{4} F_{xx}^2 F_{xy} (F_{xxx} F_{yyy} + 9 F_{xxy} F_{yyy}) \varphi \Big] \\
& + \frac{1}{D^5} \Big[\frac{5}{2} F_{xxx} F_{xxy} F_{xx} F_{xy}^3 \varphi + \frac{5}{12} F_{xx}^2 F_{xy}^3 (F_{xxx} F_{yyy} + 9 F_{xxy} F_{yyy}) \varphi \Big] \\
& + \frac{1}{D^6} \Big[\frac{5}{4} F_{xxx} F_{xxy} F_{xx} F_{xy}^5 \varphi \Big]
\end{aligned}$$

Der Fall $m=1$. Wenn $\varphi(x, y)$ und $f(x, y)$ tatsächlich von y frei, also lediglich in $\varphi(x)$ und $f(x)$ ausarten, alle Ableitungen $\varphi_y, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}, \dots, f_y, f_{yx}, \dots$ verschwinden. Somit erhält man aus (23) den⁴⁾

Satz 5. Die Funktionen $\varphi(x)$, $F(x)$ und $f(x) = \exp F(x)$ seien im endlichen oder unendlichen Intervall $a \leq x \leq b$ definiert und den folgenden Bedingungen unterworfen.

1° $\varphi(x)[f(x)]^n$ sei absolut integrabel in $a \leq x \leq b$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

2° Die Funktion $F(x) = \log f(x)$ erreiche an einer Stelle ξ im Innern von a, b ihr Maximum, und zwar sei die obere Grenz von $F(x)$ in jedem abgeschlossenen Intervall, das ξ nicht enthält, kleiner als $F(\xi)$, ferner gebe es eine Umgebung von ξ , wo $F''(x)$ existiert und stetig ist. Endlich sei $F''(\xi) < 0$.

3° $\varphi(x)$ sei stetig für $x = \xi$, $\varphi(\xi) \neq 0$.

Dann gilt für $n \rightarrow \infty$ die folgende asymptotische Formel:

$$(25) \quad \int_a^b \varphi(x) [f(x)]^n dx \cong \sqrt{\frac{-2\pi}{nF''(\xi)}} [f(\xi)]^n \left\{ \varphi(\xi) + \frac{1}{n} \psi(\xi) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\},$$

wobei

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2F''(\xi)} \left[-\varphi''(\xi) + \frac{\varphi'(\xi)F'''(\xi)}{F''(\xi)} + \frac{\varphi(\xi)F''''(\xi)}{4F'''(\xi)} + \frac{5}{12} \varphi(\xi) \left(\frac{F'''(\xi)}{F''(\xi)} \right)^2 \right].$$

Der schreiber beendigen diese Schrift mit seinen herzlichen Dank für Prof. Y. Watanabes lehrreiche Suggestion.

⁴⁾ Die Aussage Satzes 5. ist aus Polya und Szegö, loc. cit. Kopiert, darin, aber unsere vorgedachte Annahme etwas verringert worden ist. Um die Abschätzung des $O\left(\frac{1}{n}\right)$, &c. zu ausführen können, haben wir einigermaßen vermehrte Voraussetzung gemacht.