Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. VI. 1955.

# AUFGABEN BETREFFEND DAS IRRFAHRTPROBLEM

Von

Yoshikatsu WATANABE

(Eingegangen am 30 September, 1955)

Pólya handelt, in seiner interessante Arbeit „Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz", Math. Ann. 84 (1921), S. 141–160, von der Wahrscheinlichkeit $\Omega_n$, dafür, daß der im $d$-dimensionalen Geradennetz herumwandernde Punkt, welcher zur Zeit $t=0$ im Anfangspunkt des Koordinatensystems sein Irrfahrt beginnt mit der Geschwindigkeit 1 und jedem Zeitpunkt $t=0, 1, 2, \cdots$ mit der Wahrscheinlichkeit $1/2d$ für eine der $d$-Koordinatenaxen parallelen $2d$ Richtungen sich entscheidet, innerhalb der Zeitspann $0<t\leqq 2n$ mindestens einmal wieder den Anfangspunkt zurückkehrt. Offenbar wächst $\Omega_n$ mit $n$, und zwar strebt es gegen 1 für $n\to\infty$ bei $d=1$ oder $d=2$, während dagegen bei $d\geqq 3$, gegen eine Bruchzahl $<1$, und also der Wanderer gewiß ins Unendliche entgeht. Also stellt der wesentliche Unterschied sich beim Übergang von der Ebene zu dem dreidimensionalen Raum ein. Jetzt betrachte ich drei betreffende Aufgaben: Wie ist es beschaffen, **1.** wenn das ebene Straßennetz, an statt von Rechtkreuzung, sich sechswinklig konstruirt, so daß nun eine vom Zufall geleitete Entscheidung unter 6 gleichmöglichen Richtungen fällt? [1] **2.** Oder, für zwei parallele ebene ähnliche Straßennetze, die durch Elevator in jedem Kreuz kombiniert werden, so daß 5 Richtungen gleichmöglich sind? **3.** Schließlich für den Fall, daß außer Bewegungen an $2d$-gleichmöglichen Richtungen noch die Ruhesitzung in demselben Punkt während nächster Zeiteinheit ebenso auch wahrscheinlich ist?

## § 1.

Wir stellen uns ein hexagonales (dreieckiges) Straßennetz, und dreilineare $\alpha$-, $\beta$- und $\gamma$- Koordinatenachsen (Fig 1), $O$, die Ausgangsstelle des Wanderers als Anfangspunkt des Koordinatensystems vor. Die gewöhnlichen obliquen Koordinaten jedes Knotenpunktes $M$, d.h. Punktes mit ganzzahligen Koordinaten, mögen

[1] Dies wird schon von A. Dvoretzky und P. Erdös gefragt und ohne Beweis antwortet: Some Problems on Random Walk in Space, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, held at the statistical laboratory, Department of Mathematics, University of California, 1951, p. 367. Auch für ähnliches hexagonales Straßennetz aber mit nur einseitigem Wege ist gelöst von R. Sherman Lehman: A Problem on Random Walk, ditto, p. 263.

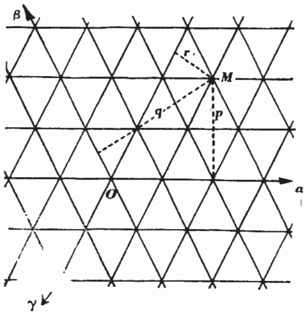


Fig.1.

entweder durch $(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$ in bezug auf $\alpha$–, $\beta$–Achsen, dabei $\gamma$–Achse verlassen ist, oder gleicherweise durch $(\beta_\alpha, \gamma_\alpha)$, oder abermals durch $(\gamma_\beta, \alpha_\beta)$ angegeben werden. Wenn der Wanderer an jedem neuen Knotenpunkt angelangt, soll er sich mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ für eine der möglichen 6 Richtungen entscheiden.

Es seien $p$, $q$ und $r$ die Längen der auf je $\alpha$–, $\beta$–, und $\gamma$–Achse gafällten Lote, deren Vorzeichen folgendermaßen bestimmt werden soll.

Angenommen die Reihenfolge $\alpha\beta\gamma\alpha$, halbiert z.B. volle $\alpha$–Achse die ganze Ebene zu zwei Halbebenen, deren eine zwar positive $\beta$–Achse enthält und hier $p>0$ sei, während die andere aber negative $\beta$–Achse enthält und dort $p<0$, usw. Damit erhält man

$$\frac{2}{\sqrt{3}}p=\beta_\gamma=-\gamma_\beta,\quad \frac{2}{\sqrt{3}}q=\gamma_\alpha=-\alpha_\gamma,\quad \frac{2}{\sqrt{3}}r=\alpha_\beta=-\beta_\alpha.$$

Es ist aber $p+q+r=0$ und mithin $\alpha_\beta+\beta_\gamma+\gamma_\alpha=0$. Also, obgleich dreilineare Koordinaten eines Punktes durch $(\alpha_\beta, \beta_\gamma, \gamma_\alpha)$—oder, kurz als $(\alpha, \beta, \gamma)$—gegeben werden mögen, können sie durch je zwei von $\alpha, \beta, \gamma$, schon urteilt werden. Danach sind die zu $(\alpha, \beta, \gamma)$ nächstliegenden Knotenpunkte nicht $(\alpha\pm1, \beta, \gamma)$, $(\alpha, \beta\pm1, \gamma)$, $\cdots$, sondern eben

$$(1)\qquad (\alpha\pm1, \beta, \gamma\mp1),\quad (\alpha, \beta\pm1, \gamma\mp1)\quad \text{und}\quad (\alpha\pm1, \beta\mp1, \gamma);$$

insbesondere sind die Nachbarspunkte zu $O(0, 0, 0)$ zwar $(\pm1, 0, \mp1)$, $(0, \pm1, \mp1)$ und $(\pm1, \mp1, 0)$.

Wir betrachten einen Wanderer, der zur Zeit $t=0$ von $O$ aus anbrechend auf der oben beschreibenen Weise im hexagonalen Straßennetz herumirrt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Zeitpunkt $t=m$ der Wanderer im Knotenpunkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ sich findet, sei mit $P_m(\alpha, \beta, \gamma)$ bezeichnet. Dann ist $6^m P_m(\alpha, \beta, \gamma)$ die Anzahl sämtlicher Zickzackwege im Netz, die aus $m$ Stücken von der Länge 1 zusammengesetzt ist und vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(\alpha, \beta, \gamma)$ führt. Daher ist

$$(2)\qquad 6^m P_m(\alpha, \beta, \gamma)=\sum_{\nu=1}^{6} 6^{m-1}P_{m-1}(\alpha'_\nu, \beta'_\nu, \gamma'_\nu),$$

die Summe über die zu $(\alpha, \beta, \gamma)$ nächstliegenden 6 Punkte $(\alpha'_\nu, \beta'_\nu, \gamma'_\nu)$ erstreckt. Die Wahrscheinlichkeit läßt sich mittels dreifaches Integrals durch

$$(3)\qquad P_m(\alpha, \beta, \gamma) \equiv P_m(\alpha, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint \left(\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_3)+\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{3}\right)^m \exp\{i\alpha(\varphi_1-\varphi_3)+i\beta(\varphi_2-\varphi_3)\}\,d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$$

darstellen, wobei das Integrationsgebiet aus einem Würfel $W: 0 \leqq \varphi_k \leqq 2\pi$, $(k=1, 2, 3)$ besteht.

*Beweis.* Bei $m=0$ ist es klar, da nach Anfangsbedingung $P_0(0, 0)=1$ so wie $P_0(\alpha, \beta)=0$ für $(\alpha, \beta)\neq(0, 0)$ sind. Wenn (3) bei $t=m$ gilt, so ist auch (3) richtig bei $t=m+1$. Denn, wegen (2) entsteht die Rekursionsformel $P_{m+1}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{6}\sum P_m(\alpha', \beta', \gamma')$, worin für $(\alpha', \beta', \gamma')$ die Werte (1) eingesetzt, sodann nach (3) bei $t=m$ berechnet, die resultierende Summe mit (3) für $t=m+1$ übereinkommt. Also ist der Beweis vollständig geleistet. Insbesondere gilt

$$(4)\qquad P_m(0, 0, 0) \equiv P_m(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_W \left[\frac{1}{3}\Big(\cos(\varphi_1-\varphi_3)+\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\Big)\right]^m d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

Für $m=1$ ist notwendig $P_m(0, 0)=0$, jedoch wird für jedes ganzzahliges $m\geqq 2$ zwar $P_m(0, 0)>0$, was bei gerades $m$ aus (4) klar ist, während bei ungerades $m$ wegen (2) auch giltig.[2)]

Wir werden nun $P_m(0, 0)$ für großes $m$ abschätzen, und dazu den Integrand in (3) nach absoluten Betrage

$$(5)\qquad \left|\frac{1}{3}\Big(\cos(\varphi_1-\varphi_3)+\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\Big)\right|^m$$

erwögen. Dies erreicht sein Maximum 1 längs Diagonales $D$ des Würfels $W: \varphi_1=\varphi_2=\varphi_3$. Überdies erlangt (5) auch sein Maximum 1 bei am Ende von $D$ nicht liegenden 6 Sheiteln. Es seien $V$ das rechtwinklige Prism, $D$ als Achse mit Quadratbasis der Kantenlänge $2a$, und $W_j (j=1, 2, \cdots, 6)$, die kleine Würfel mit Kantenlänge $a$, je habende gemeine Scheitel mit $W$. Im Bereich $U=W-V-\Sigma W_j$ hat der Ausdruck (5) eine obere Grenz $\rho(<1)$, und demnach geht das über $U$ erstreckte Integral $J$ unten $O(\rho^m)=0\left(\frac{1}{n^N}\right)$ mit beliebig großes $N$ bei $m\to\infty$ nieder. Um die über $V$ und $W_j$ erstreckte Integrale zu berechnen, transformiere man die rechtwinklige Koordinaten $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ in neue rechtwinklige Koordinaten $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, wie etwa

2) Es ist anschaulich ersichtlich, daß z.B. $P_m(1, -1, 0)>0$ für jedes $m>1$ ist. Denn, es bräche der Wanderer zur Zeit $t=0$ vom Punkt $(1, -1, 0)$ auf, und irre nur längs des Perimeters des Hexagon mit Mittelpunkt $O(0, 0, 0)$ bis zur Zeit $t=m-1$ herum, alsdann ging zu $O$. Der umkehrte Zigzagweg gilt eben denjenigen der ausgehend von $O$ und zur Zeit $t=m$ am Punkt $(1, -1, 0)$ erlangt, und also ist gewiß $P_m(1, -1, 0)>0$. Daraus aber folgt, daß $P_m(0, 0, 0)>0$ für jedes $m\geqq 2$.

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_3,\\ \varphi_2 &= \qquad\quad -\frac{2}{\sqrt{6}}\psi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_3,\\ \varphi_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_2+\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_3,\end{aligned}\qquad \text{mit Jakobien} = \frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{\partial(\psi_1,\psi_2,\psi_3)} = 1.$$

Infolgedessen ergibt sich

$$J_V = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_V \left[\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{3}\right]^m d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi\sqrt{3}} d\psi_3 \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{3}\left(\cos\frac{2\psi_1}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\psi_1+\sqrt{3}\psi_2}{\sqrt{2}}+\cos\frac{\psi_1-\sqrt{3}\psi_2}{\sqrt{2}}\right)\right]^m d\psi_1 d\psi_2.$$

Dabei wird etwaig am Ende sich erhebender Fehler $=O(a^3)$ und folglich $\to 0$ bei $a\to 0$. Setzt man ferner $\psi_k=t_k/\sqrt{m}$ $(k=1, 2)$, so gilt asymptotisch bei genügend großem $m$

$$J_V = \frac{\sqrt{3}}{4\pi^2}\int_{-\sqrt{m}a}^{\sqrt{m}a}\int_{-\sqrt{m}a}^{\sqrt{m}a}\left[\frac{1}{3}\left(\cos\frac{2t_1}{\sqrt{2m}}+\cos\frac{t_1+\sqrt{3}t_2}{\sqrt{2m}}+\cos\frac{t_1-\sqrt{3}t_2}{\sqrt{2m}}\right)\right]^m \frac{dt_1 dt_2}{m}$$

$$\cong \frac{\sqrt{3}}{4m\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{t_1^2}{2}-\frac{t_2^2}{2}\right\}dt_1\,dt_2 \cong \frac{\sqrt{3}}{2m\pi}.\ ^{3)}$$

Ich habe noch die Beitragen aus $W_j$ zu abschätzen. Z.B. mache ich für $W_1$: $2\pi-a<\varphi<2\pi$, $0<\varphi_2<a$, $0<\varphi_3<a$, die Transformation

$$\xi_1 = 2\pi+\sqrt{2}\psi_1, \quad \xi_2 = -2\pi+\sqrt{6}\psi_2, \quad \xi_3 = -2\pi+\sqrt{3}\psi_3.$$

so ergeben sich $0<\xi_1<2a$, $-3a<\xi_2<a$, $-a<\xi_3<2a$, mti Jakobien $=\dfrac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}=6$, und gilt

$$J_{W_1} = \frac{1}{48\pi^3}\int_{-a}^{2a}\int_{-3a}^{a}\int_0^{2a}\left[\frac{1}{3}\left(\cos\xi_1+\cos\frac{\xi_1+\xi_2}{2}+\cos\frac{\xi_1-\xi_2}{2}\right)\right]^m d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

was durch nochmalige Ersetzung $\xi_k=t_k/\sqrt{m}$ $(k=1, 2)$ bei $m\to\infty$

$$\cong \frac{a}{16\pi^3 m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\exp\left\{-\frac{3t_1^2}{4}-\frac{t_2^2}{4}\right\}dt_1\,dt_2 \cong \frac{a}{8\sqrt{3}\pi^2 m}$$

wird, und dgl. für andre $W_j$. Da aber $a$ beliebig klein gemacht werden kann.[4] so kommt

---

3) Vgl. dazu Y. Watanabe und Y. Ichijô, Über die Laplacesche asymptotische Formel für das Integrale von Potenz mit großen Indexe, dieses Journ. S. 63.

4) Wir wollen am Ende den Schluß ziehen, daß $\sum P_m(0, 0, 0)=\infty$, wofür Abschätzung (6) bereits genug thut, geschweige denn dazu Hinzusetzung der nicht negativen $J_{W_j}$, wie beschaffen es seien, je mehr divergieren läßt.

$$P_m(0,\ 0,\ 0) \simeq \frac{\sqrt{3}}{2m\pi}. \tag{6}$$

Obwohl dies etwas verschieden von Pólyasche Resultaten $P_{2n}(0,\ 0) = \frac{1}{n\pi}$, $P_{2n+1}(0,0) = 0$ scheint, doch divergiert gleichviel gegenwärtige Reihe $\sum P_m(0,\ 0)$ und stimmt weiterer Schluß mit Pólyaschem überein.[5] Seien nämlich, $\Omega_n$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wanderer innerhalb der Zeitspann $0 < t \leqq n$ den Anfangspunkt zurückkehrt, und $\omega_m$ bei $0 < m \leqq n$, die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der Wanderer erstemals in $t = m$ den Anfangspunkt zurückkehrt, so gilt

$$\Omega_n = \sum_{m=1}^{n} \omega_m, \tag{7}$$

während $P_m(0,\ 0.\ 0)$ nichts anders als der Koeffizient von $z^m$ in die Entwickelung des Bruches $(1 - \omega_1 z - \omega_2 z^2 - \cdots)^{-1}$ ist, und deswegen lautet

$$f(z) \equiv 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m z^m = \frac{1}{\sum P_m(0,\ 0,\ 0) z^m}. \tag{8}$$

Daraus aber folgt $f(1-0) = 0$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m = 1$, wenn $\sum P_m(0,\ 0,\ 0) = \infty$.

## § 2.

Ich lege mir zwei parallele Kreuzförmige Pólyasche Straßennetz über, deren ein auf Ebene $z = 0$, aber das andere auf Ebene $z = 1$ gebaut, und entsprechende Kreuzpunkte durch Elevator verbindet worden sind, so daß an jedem Knotenpunkte 5 Richtungen deren vier horizontale Kreuzen und eine vertikales Auf- oder Abgehen sind, aufs Geratwohl ausgewählt werden können. Für solches Straßennetz ist die betreffende Wahrscheinlichkeit $P_m(x,\ y,\ z)$, die ebenso als (1.3) definiert ist, in folgendermaßen dargestellt:

$$P_m(x,\ y,\ z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left( \frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + \cos\theta + i\sin\theta}{5} \right)^m \exp\{-ix\varphi - iy\psi - iz\theta\}\, d\varphi\, \alpha\psi\, d\theta, \tag{1}$$

wobei $x$ und $y$ irgend ganze Zahlen, aber $z = 0$ oder 1 bedeuten. Nach Anfangsbedingung sind $P_0(0,\ 0,\ 0) = 1$ und $P_0(x,\ y,\ z) = 0$ bei $(x,\ y,\ z) \neq (0,\ 0,\ 0)$, wofür (1) eben richtig bestehen. Allgemein kann (1) mit hilfe der zu (1.2) gleichartigen Rekursionsformel

$$P_m(x,\ y,\ z) = \frac{1}{5} \sum P_{m-1}(x',\ y',\ z')$$

durch vollständige Induktion bewiesen werden.

---

5) Siehe Pólya, l.c. S. 156.

Nun will ich $P_m(0, 0, 0)$ für genügend großes $m$ ausrechnen. Bei ungerades $m$ ist ersichtlich

$$(2) \qquad P_{2n+1}(0, 0, 0) = 0,$$

während für gerades $m=2n$

$$(3) \qquad P_{2n}(0, 0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + \cos\theta + i\sin\theta}{5}\right)^{2n} d\varphi\, d\psi\, d\theta$$

gilt. Da aber die Größe

$$R = \left|\frac{2\cos\varphi + 2\cos\psi + \cos\theta + i\sin\theta}{5}\right|$$

für $\varphi=\psi=\theta=0$ oder $\pi$ innerhalb des ganzen Integrationsgebietes $W$ ihre Maxmum 1 erreicht, so beträgt

$$R \leqq \rho < 1 \quad \text{in} \quad W - W_0 - W_\pi = U,$$

wobei $W_0$ und $W_\pi$ zwei offenen Würfel mit jede Mittelpunkt $(0, 0, 0)$, $(\pi, \pi, \pi)$ von der Kantenlänge $2a$ $(0<a<1)$ bedeuten. Damit wird

$$\left|\iiint_U\right| < \rho^m = 0\left(\frac{1}{m^N}\right)$$

übergezeugt. Anderseits ist der Beitrage aus $W_0$

$$\iiint_{W_0} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-a}^{a} \left[\frac{1}{5}\left(2\cos\frac{t_1}{\sqrt{n}} + 2\cos\frac{t_2}{\sqrt{n}} + \cos\frac{t_3}{\sqrt{n}} + i\sin\frac{t_3}{\sqrt{n}}\right)\right]^{2n} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{n\sqrt{n}}$$

$$(\varphi = t_1/\sqrt{n}, \ \psi = t_2/\sqrt{n}, \ \theta = t_3/\sqrt{n})$$

$$\cong \frac{1}{8\pi^3 n\sqrt{n}} \iiint_{-\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}a} \left[1 - \frac{2t_1^2 + 2t_2^2 + t_3^2}{10n} + \frac{it_3}{5\sqrt{n}} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{2n} dt_1\, dt_2\, dt_3.$$

Darin gilt der Integrand

$$\exp\left[2n \log \left\{1 - \frac{2t_1^2 + 2t_2^2 + t_3^2}{10n} + \frac{it_3}{5\sqrt{n}} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]$$

$$\cong \exp\left\{-\frac{2t_1^2 + 2t_2^2 + t_3^2}{5} + \frac{2it_3}{5}\sqrt{n} + 0(1)\right\}$$

für $n \to \infty$. Hiermit erhält man

$$\iiint_{W_0} \cong \frac{1}{8\pi^3 n\sqrt{n}} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2t_1^2 + 2t_2^2}{5}\right\} dt_1 dt_2 \int_{-\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}a} \exp\left\{-\frac{t_3^2}{5} + \frac{2i}{5} t_3\sqrt{n}\right\} dt_3$$

$$\cong \frac{5}{16\pi^2} \int_{-\sqrt{n}a}^{\sqrt{n}a} \exp\left(-\frac{t_3^2}{5}\right) \left[\cos\frac{2}{5} t_3\sqrt{n} + i\sin\frac{2}{5} t_3\sqrt{n}\right] dt_3,$$

und derselbe gilt für $W_\pi$, und daraus folgt

$$(4) \qquad P_{2n}(0,\,0,\,0) \cong \frac{5}{4\pi^2 n\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}a} \exp\left\{-\frac{t_3^2}{5}\right\} \cos\frac{2}{5}\, t_3\sqrt{n}\, dt_3$$
$$= \int_0^\infty - \int_{\sqrt{n}a}^\infty = \text{(i)} - \text{(ii)},$$

worin, wie funktionentheoretisch ermittelt werden kann,

$$\text{(i)} \cong \left(\frac{5}{n\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{n}{5}} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

In bezug auf (ii) setze ich $\frac{2}{5}\, t_3\sqrt{n} = t$, so dann hervorgeht bei $p\pi - \frac{\pi}{2} \leqq \frac{2na}{5} < p\pi + \frac{\pi}{2}$

$$|\text{(ii)}| \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2n\pi}\right)^2 \left|\int_{2na/5}^{\infty} \exp\left\{-\frac{5t^2}{4n}\right\} \cos t\, dt\right|$$
$$\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2n\pi}\right)^2 \int_{p\pi-\pi/2}^{pn+\pi/2} \exp\left\{-\frac{5t^2}{4n}\right\} |\cos t|\, dt$$
$$< \frac{25}{8n^2\pi} \exp\left\{-\frac{5}{4n}\left(p\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2\right\}$$
$$\cong \frac{25}{8n^2\pi} \exp\left\{-\frac{na^2}{5}\right\} \leqq \frac{25}{8n^2\pi}.$$

Daher

$$(5) \qquad P_{2n}(0,\,0,\,0) < \left(\frac{5}{n\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{25}{8n^2\pi},$$

womit, gewählt passend großes $n_0 = n_0(\varepsilon)$,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} P_{2n}(0,\,0,\,0) \leqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{5}{n\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{25}{8n^2\pi} < \varepsilon,$$

und damit ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(0, 0, 0)$ schon gesichert worden. Daraus aber folgt, daß die Reihe (1.8) bei $z \to 1-0$ gegen gewißes positives Bruch $<1$ konvergiert, und folglich aus (1.7) $\lim_{n\to\infty} \Omega_n$ unter gewißem Bruch $<1$ bleibt. Also tritt wesentlicher Unterschied, was sich beim Übergang von der Ebene zum dreidimensionalen Raum einstellt, schon beim ebenen Straßennetz, das durch nur eine unterirdishe Straße erweitert ist, auf.

## § 3.

Y. Hayashi befragte mir mündlich, ob das Auf- oder Abgehen bei unterirdish erstreckte Straßennetz etwas gleichgültig gegen die Ruhesitzung an demselben Punkt in einfache Straßennetze sei. Diese Frage ist bemerkenswürdig, aber die Beantwortung ist nein.

Es seien $q$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der auf den $d$–dimensionalen geradennetz herumwandernde Punkt an jedem ganzzahligen Zeitpunkte $t=m$ sich im Ruhe in denselben Punkt während nächsten Zeiteinheit läßt, und $p/2d$ mit $p=1-q$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt sich längs einer der gleichmäßig möglichen $2d$ Richtungen bewegt. Offenbar ist in diesem Falle $P_m(0, \cdots, 0)>0$ für jedes ganze $m$, also schon verschieden als (2.2). Im allgemeinen gilt

$$(1) \qquad P_m(x_1, x_2, \cdots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\Big[\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}(\cos\varphi_\nu + q\Big]^m \exp\Big[-i\sum_{\nu=1}^{d}x_\nu\varphi_\nu\Big]d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_d,$$

dessen Integral über den Würfel $W$: $-\alpha\leqq\varphi_\nu\leqq 2\pi-\alpha$ $(\nu=1, 2, \cdots, d)$ erstreckt ist, dabei sei $0<\alpha<\pi$, so daß $O(0, 0, \cdots, 0)$ ein innere Punkt des $W$ ist. Denn, bei $m=0$ ist $P_0(0, 0, \cdots, 0)=1$ nach Anfangsbedingung, und für $(x_1, x_2, \cdots, x_d)\neq(0, 0 \cdots, 0)$ besteht

$$P_0(x_1, \cdots, x_0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\exp\{-i\sum x_\nu\varphi_\nu\}\, d\varphi_1 \cdots d\varphi_d = 0.$$

Also ist (1) bei $m=0$ bereits wahr, und aus der Richtigkeit für $m$ folgt sie für $m+1$, da nach der Rekursionsformel

$$P_{m+1}(x_1, \cdots, x_d) = \frac{p}{2d}\sum_{\nu=1}^{d}P_m(x_1, \cdots, x_\nu\pm 1, \cdots, x_d) + q\,P_m(x_1, \cdots, x_d),$$

dessen rechten Seite durch Einsetzung von (1)

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\Big(\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}\cos\varphi_\nu+q\Big)^m\Big[\sum_{\nu=1}^{d}\frac{p}{2d}(e^{i\varphi_\nu}+e^{-i\varphi_\nu})+q\Big]$$
$$\exp[-i\sum_\nu x_\nu\varphi_\nu]\,d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_d$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\Big(\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}\cos\varphi_\nu+q\Big)^{m+1}\exp[-i\sum_\nu x_\nu\varphi_\nu]\,d\varphi_1\cdots d\varphi_d$$

liefert. Insbesondere

$$(2) \qquad P_m(0, 0, \cdots, 0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\iint\cdots\int\Big(\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}\cos\varphi_\nu+q\Big)^m d\varphi_1\cdots d\varphi_d,$$

das abschätzt zu werden braucht. Um das Maximum des Integrandes nach absolute Betrage zu ausfinden, betrachte man $Y=\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}\cos\varphi_\nu+q$, und setze Ableitungen $\frac{\partial Y}{\partial\varphi_\nu}=\frac{p}{d}\sin\varphi_\nu=0$ $(\nu=1, 2, \cdots, d)$, so dann werden $\varphi_\nu=0$, $\pi$ erhält. Tatsächlich erreicht $Y$ den maximale Wert 1 bei alle $\varphi_\nu=0$ während für alle $\varphi_\nu=\pi$ nicht so, da $|q-p/d|<1$ ist, und dgl. wenn $\varphi_\nu=0$, $\varphi_\mu=\pi$ gleichzeitig stattfinden. Somit erhalten wir nur einzige maximale Punkt $O(0, 0, \cdots, 0)$, sofern $q\neq 0$ ist.

Es sei $W_0$ offener Würfel von der Kantenlänge $2a$, $O$ als Mittelpunkt. In das abgeschossene Gebiet $W-W_0=V$ hat $Y$ ein bestimmtes Maximum $\rho$ $(0<\rho<1)$ und der von diesem Gebiet herrühende Teil des Integrales (2) ist $<\rho^m$, also wird $o\left(\frac{1}{m^N}\right)$ und vernachlässigbar. Daher braucht man nur über $W_0$ erstreckter Teil $J_{W_0}$ des Integrales (2) zu betrachten. Dies ist

$$J_{W_0} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\int_{\varphi_\nu=-a}^{\varphi_\nu=a} \cdots \int \left(\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d} \cos\varphi_\nu + q\right)^m d\varphi_1 \cdots d\varphi_d \quad \left(\varphi_\nu = \frac{t_\nu}{\sqrt{m}}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{m})^d} \int\int_{-a\sqrt{m}}^{a\sqrt{m}} \cdots \int \exp m \log\left[\frac{p}{d}\sum\cos\frac{t_\nu}{\sqrt{m}} + q\right] dt_1 \cdots dt_d.$$

Es ist aber der Exponent im Integrande bei genügend großes $m$

$$\exp\left\{m \log\left[\frac{p}{d}\sum_{\nu=1}^{d}\left(1-\frac{t_\nu^2}{2m}\right) + q + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{m \log\left[1 - \frac{p}{2dm}\sum_{\nu=1}^{d} t_\nu^2 + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right]\right\}$$

$$\cong \exp\left\{-\frac{p}{2d}\sum_{\nu=1}^{d} t_\nu^2\right\}.$$

Daraus läßt sich zeigen

$$J_{W_0} \cong \frac{1}{(2\pi\sqrt{m})^d} \prod_{\nu=1}^{d} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{p}{2d}t_\nu^2\right\} dt_\nu = \left(\frac{d}{2\pi m p}\right)^{\frac{d}{2}},$$

und also entsteht für $m \to \infty$

$$P_m(0, 0, \cdots, 0) \cong \left(\frac{d}{2\pi m p}\right)^{\frac{d}{2}}. \tag{3}$$

Die oben gestellte Hayashis Frage entspricht zum besonderen Falle, daß $d=2$, $q=\frac{1}{5}$, $p=\frac{4}{5}$, und darauf

$$P_m(0, 0) \cong \frac{5}{4m\pi} \tag{4}$$

gegenüber (2.5) antwortet.

Pólyasche Resultat war

$$P_m(0, 0, \cdots, 0) \cong 2\left(\frac{d}{4n\pi}\right)^{d/2} \quad \text{oder } 0$$

je nach dem $m=2n$ oder $2n-1$, so daß durchschnittlich

$$\left(\frac{d}{2\pi m}\right)^{d/2},$$

was etwas kleiner als obiges (3) ist. Also ist die Gelegenheit des Zurückkehren mit der Hinzufügung des Ruhezustandes ein wening vermehrt. Da aber die Konvergenzeigenschaft der Reihe $\sum P_m$ so beschaffen wie Pólyasche ist, bleibt Pólyasche Schluß durchaus unveränderlich, ob die Ruhesitzung stattfände oder nicht.