

ÜBER DIE VERTRÄGLICHKEIT-EIGENSCHAFT DER GEWISSEM- MASSEN ERWEITERTEN CESÀROSCHEN UND ABELSCHEN LIMITIERUNGSVERFAHREN BEI INTEGRALEN

Yoshikatsu WATANABE

Mathematische Institut, Gakugei Fakultät, Tokushima Universität

(Eingegangen am 15. September, 1953)

In meiner vorstehenden Note „Eine Verallgemeinerung des Abelschen Limitierungsverfahren bei Integralen“ ist nichts in bezug auf seiner Verträglichkeitsbedingung erreicht. Es scheint zwar wertvoll die Bedingungen zu entscheiden, worunter aus dem Vorhandensein eines von beiden Limes, A und $\mathcal{A}$, dasjenige des anderen gefolgert werden kann. Da aber dies mir noch nicht gelungen ist¹⁾, soll in der vorliegenden Note nur die Verträglichkeit zwischen gewissermaßen erweiterten Cesàroschen und Abelschen Limitierungsverfahren behandelt werden.

¹⁾ Es sei $\varphi(x, u)$ der Kern der Transformation welche gewöhnliches $\mathcal{A}$ -Mittel auf unser verallgemeinertes $\mathcal{A}$ -Mittel führt, also

$$\int_{\omega}^x \varphi(x, u) \frac{du}{u} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{v}{u}\right) s(v) dv \cong \frac{1}{x} \int_a^{\infty} \exp\left\{-\frac{g(v)}{x}\right\} g'(v) s(v) dv,$$

wobei $g(x)$ irgendeine gegebene monoton zunehmende positive Funktion mit $g(\infty) = \infty$ bedeutet, und das Zeichen $\cong$ die für genügend großes x asymptotisch bestehende Gleichheit meint. Dann bekommen wir eine Integralgleichung:

$$\int_{\omega}^x \varphi(x, u) \exp\left(-\frac{v}{u}\right) \frac{du}{u} \cong \frac{1}{x} \exp\left\{-\frac{g(v)}{x}\right\} g'(v),$$

woraus die unbekante Funktion, $\varphi(x, u)$ gefunden werden soll. Aber diese Integralgleichung hat eine ganz verschiedene Gestalt als klassische, und also gehört zu weder Volterraschem noch Fredholm'schem Typus. Aber doch die hier eingeführte Integralgleichung ist keineswegs sinnlos. Ist z.B. $g(v) = v$, so lautet $\int_{\omega}^x \varphi(x, u) e^{-\frac{v}{u}} \frac{du}{u} \cong \frac{1}{x} e^{-\frac{v}{x}}$. Setzt man etwa $\varphi(x, u) = 0$ bei $\omega < u < x-1$ und $\varphi(x, u) = \frac{u}{x}$ bei $x-1 < u < x$ voraus, so erhält man mit Benutzung des zweiten Mittelwertsatzes für großes x

$$\int_{\omega}^x = \int_{x-1}^x e^{-\frac{v}{u}} \frac{du}{u} = e^{-\frac{v}{x-1}} \int_{x-1}^x \frac{du}{u} + e^{-\frac{v}{x}} \int_x^x \frac{du}{u} \cong \frac{1}{x} e^{-\frac{v}{x}}.$$

Also genügt oben vorausgesetztes $\varphi(x, u)$ asymptotisch der Integralgleichung, und sogar sogenannten Toeplitz'schen Bedingungen, da sowohl $\int_{\omega}^x \varphi(x, u) du \cong 1$, als $\varphi(x, u) \cong 0$ für $x \rightarrow \infty$ stattfinden. Allgemeiner, multipliziert man beide Seite mit v^n und integriert von $a(=0)$ bis ∞ , so erhält man

$$\int_{\omega}^x v^n \varphi(x, u) du = - \int_0^{\infty} v^n d \exp\left(-\frac{g(v)}{x}\right) = \mu_n, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Hiermit hat man sog. Hausdorff-Hamburgersches Moment-Problem zu auflösen.

§ 1. Man definiere neues Cesàrosches Mittel durch

$$(1) \quad \begin{aligned} C_{k-s}(x) &= \frac{k}{g(x)^k} \int_a^x [g(x) - g(u)]^{k-1} s(u) g'(u) du \quad (k > 0) \\ &= \int_a^x \left[1 - \frac{g(u)}{g(x)} \right]^k s'(u) du,^{2)} \end{aligned}$$

worin die Funktion $g(x)$ positiv, monoton wachsend, gegen ∞ für $x \rightarrow \infty$ strebend, und zweimal differenzierbar ist, dabei allgemein $0 \leq g'(x) < \infty$ bleibt, aber sonst im Falle $g'(a) = \infty$ doch $\lim_{x \rightarrow a} x g'(x) < \infty$, also $a = 0$, $g'(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \rightarrow 0$ sein soll. Jedoch darf $g(x)$ sogenannten stückweise glatt sein, oder sogar Sprünge machen³⁾. Wenn es abzählbar unendlich vielen Sprungstellen geben, so braucht man das Integral nur im Lebesgueschen Sinne zu verstehen. Für $g(x) = x$ stimmt unser $C_{k-s}(x)$ mit übliches Cesàrosches Mittel $C_{k-s}(x)$ überein. Nun soll die Verträglichkeit

$$(2) \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} C_{k-s}(x) = l \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow \infty} C_{k-s}(x) = l \right)$$

untersucht werden. Da es bei gebrochenes k etwas verwickelt ist, so beschäftige ich mich nur mit dem Falle $k = 1$, d.h. dem arithmetischen Mittel.

Es sei $\varphi(x, u)$, der Kern der Transformation, wodurch $C_{1-s}(x)$ auf $C_{1-s}(x)$ transformiert werde:

$$\begin{aligned} \int_a^x \varphi(x, u) \frac{du}{u} \int_a^u s(v) dv &= \int_a^x s(v) dv \int_v^x \varphi(x, u) \frac{du}{u} \\ &\cong \frac{1}{g(x)} \int_a^x s(v) g'(v) dv \quad \text{bei } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus läßt sich zeigen, daß

$$(3) \quad \int_v^x \varphi(x, u) \frac{du}{u} \cong \frac{g'(v)}{g(x)}.$$

Differenziert man partiell nach v , so kommt

²⁾ Wenn man das Integral als Stieltjesch verstehe, so tritt die unendliche Reihe $s(n) = \sum_{v=0}^n a_v$ auf. Oder dürfe für das Integral $s(x) = \int_a^x f(u) du$ auch $g(u)$ als Stufenfunktion angenommen werden; Jedoch müsse alsdann das Argument unten etwas umgeschrieben werden.

³⁾ Z. B. sei $g(x) = \sqrt{x}$ für $0 < x < 1$, sei $g(x) = 5$ für $1 < x < 10$ und sei $g(x) = x$ für $10 < x < \infty$. Wenn der $C_{1-s}(x)$ -Limes existiert, welcher, ohne Allgemeinheit zu verloren, als 0 vorausgesetzt werden kann, so ist bekanntlich $s'(x) = o(x)$. Daher gilt für genügend großes x

$$\begin{aligned} C_{1-g(x)-s}(x) &= \int_0^1 \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{x} \right) s'(u) du + \int_1^{10} \left(1 - \frac{5}{x} \right) s'(u) du + \int_{10}^x \left(1 - \frac{u}{x} \right) s'(u) du \\ &\cong s(x) + O\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \int_{10}^x u s'(u) du \cong C_{1-s}(x). \end{aligned}$$

$$(4) \quad -\frac{\varphi(x, v)}{v} \cong \frac{g''(v)}{g(x)}, \quad \text{d.h.} \quad \varphi(x, v) \cong -\frac{vg''(v)}{g(x)}.$$

Wird aber dies in (3) eingesetzt, so ergibt sich

$$(5) \quad -\int_v^x \frac{g''(v)}{g(x)} dv = \frac{g'(v)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Sind (3) und (5) asymptotisch gleichwertig, so muß

$$(6) \quad \frac{g'(x)}{g(x)} = o(1) \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty$$

bestehen. Ersetzt man nun anstatt (4)

$$(7) \quad \psi(x, v) = -\frac{vg''(v)}{g(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)},$$

so strebt wegen (6) $\psi(x, v) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ bei festes v . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \int_a^x \psi(x, v) dv &= (x-a) \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{1}{g(x)} \int_a^x vg''(v) dv \\ &= \frac{1}{g(x)} \left\{ (x-a)g'(x) - xg'(x) + ag'(a) + g(x) - g(a) \right\} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$, infolge der zu $g(x)$ gemachten Voraussetzung und (6) wegen.

Man kann sogar erweisen, daß

$$\int_a^x |\psi(x, v)| dv < K$$

entsteht, wenn schließlich (etwa für $x > x_0$) $g''(v) \leq 0$ ist, oder sonst schließlich $g''(v) \geq 0$ und $xg'(x)/g(x)$ beschränkt bleibt. Deshalb bestehen alle sämtlich unter folgenden Bedingungen:

$$(8) \quad \overline{\lim} \, xg'(x)/g(x) < \infty,$$

$$(9) \quad \text{die Anzahl des Zeichenwechsel von } g''(x) = \text{endlich}^{4)}.$$

Unter Bedingungen (8), (9) liefert also $\psi(x, u)$ gewiß eine Toeplitzsche (konvergenzerhaltende) Transformation. Ist daher $s(x)$ etwa C_1 -limitierbar zum Wert l , so stimmt auch

$$(10) \quad \int_a^x \psi(x, u) C_1-s(u) du \rightarrow l \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

Andererseits ist

⁴⁾ Ich ziehe in Zweifel, daß zwischen (8) und (9) es etwaige Beziehung geben und folglich von einander nicht unabhängig sein mögen. Z. B. falls $\lim_{x \rightarrow \infty} xg'(x)/g(x) = \mu \neq 1$ vorhanden ist, und überdies die Umkehrung des l' Hospital'sch Regel zulässig ist (was aber manchmal fehlt, vgl. dazu § 2 Beispiel 18), so hat man $\lim [g(x) + xg''(x)]/g(x) = \mu$, woraus $xg''(x)/g(x) \rightarrow \mu - 1 \neq 0$ folgt und deswegen $g''(x)$ sein Zeichen schließlich bewahren soll.

$$(11) \quad \int_a^x \psi(x, u) \frac{du}{u} \int_a^u s(v) dv = \int_a^x s(v) dv \int_v^x \psi(x, u) \frac{du}{u} \\ = \frac{1}{g(x)} \int_a^x s(v) g'(v) dv - \frac{x g'(x)}{g(x)} \left[\frac{1}{x} \int_a^x s(v) dv - \frac{1}{x} \int_a^x s(v) \log \frac{x}{v} dv \right].$$

Das erste Integral in der rechten Seite ist nichts anderes als gewünschte $\mathbf{C}_1\text{-}g(x)\text{-}s(x)$, während zwei Integrale in der eckigen Klammer eben $\mathbf{C}_1\text{-}s(x)$ bzw. Höldersche Mittel $H_2\text{-}s(x)$ sind, somit einander gleich werden, falls der $\mathbf{C}_1$ -Limes existiert. Also folgt aus Vorhandensein des $\mathbf{C}_1$ -Limes unter Bedingung (8), daß Ausdruck (11) gegen den $\mathbf{C}_1\text{-}g(x)$ -Limes für $x \rightarrow \infty$ strebt. Dies mit (10) zusammengesetzt, kann man schließen, daß der obere Übergang $\rightarrow$ in (2) alsdann zulässig ist, und formulieren den

Satz 1. Die Funktion $g(x)$ sei im ganzen Integrationsintervalle $a \leq x < \infty$ erklärt, und dort positiv, monoton gegen ∞ wachsend, und ferner zweimal differenzierbar, dabei $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)/g(x) = 0$ und durchaus $g''(x) \leq 0$ gelte, oder sonst $xg'(x)/g(x)$ beschränkt bleibe, und im allgemeinen $g''(x)$ schließlich sein Zeichen bewahre. Dann kann man stets das Vorhandensein des $\mathbf{C}_1\text{-}g(x)\text{-}s(x)$ behaupten, sobald $\mathbf{C}_1\text{-}s(x)$ existiert.

§ 2. Beispielsweise schreibe ich folgende Tabelle manches $g(x)$. Man kann leicht sich überzeugen, daß für jedes von (1) bis (9) Satz 1 gilt.

Nr.	Anfangs-Punkt a	$g(x)$	$g'(x)$	$\lim xg'(x)/g(x)$
1	0	$x^c (c > 0)$	cx^{c-1}	c
2	1	$\log x$	$1/x$	0
3	e	$\log \log x$	$1/x \log x$	0
4	1	$x \log x$	$1 + \log x$	1
5	0	$x[1 - \exp(-x^2)]$	$1 + (2x^2 - 1) \exp(-x^2)$	1
6	0	$x^c \exp(-1/x)$	$g(x)(1+cx)/x^2$	c
7	0	$x^c \exp(1+x)^{-1}$	$g(x)[cx^{-1} - (x+1)^{-2}]$	c
8	0	$\log \cosh x$	$\tanh x$	1
9	0	$x \tan^{-1} x$	$\tan^{-1} x + x/(1+x^2)$	1
10	$-\infty$	e^x	e^x	∞
11	$-\infty$	$\exp(\exp x)$	$e^x \exp(\exp x)$	∞
12	1	$x^{\log x}$	$2x^{\log x} \log x/x$	∞
13	1	$(\log x)^x$	$g(x)[\log \log x + 1/\log x]$	∞
14	1	$(\log x)^{\log x}$	$g(x)[\log \log x + 1]/x$	∞
15	0	$e^x[5 - (\cos 2x + 2 \sin 2x)]$	$10e^x \sin^2 x$	$\underline{\lim} = 0, \overline{\lim} = \infty$

In Absicht der Erläuterung füge ich noch einige Beispiele hinzu.

16. Es sei

$$g(x) = 2\sqrt{x} + \int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du + \int_0^x (x-u) \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du \quad (a = 0).$$

Hier ist $g(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$, da bekanntlich

$$\frac{c(x)}{s(x)} = \int_0^x \frac{\cos u}{\sin \sqrt{u}} du \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{für } x \rightarrow \infty$$

und demnach

$$\int_0^x (x-u)s'(u)du = xC_1 - s(x) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}}x$$

strebt. Ferner gilt

$$g'(x) = \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du > 0,$$

und

$$g''(x) = -\frac{1 + \cos x}{2\sqrt{x^3}} \leq 0,$$

so daß $g(x)$ gewiß monoton zunimmt. Obgleich $g'(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow 0$ ist, jedoch ist $\lim_{x \rightarrow 0} xg'(x) = 0$. Weiter

$$\frac{xg'(x)}{g(x)} \simeq \frac{\sqrt{x}(1 + \cos x) + x\sqrt{\pi/2}}{2\sqrt{x} + (1+x)\sqrt{\pi/2}} \rightarrow 1 \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Für dieses $g(x)$ ist also Satz 1 gültig.

17. Folgendes Beispiel zeigt, daß das Bestehen von Bedingung (9) ausnahmsweise nicht notwendig ist. Es sei $g''(x) = \frac{\sin x}{x} \geq 0$, so daß $g'(x) = \int_0^x \frac{\sin v}{v} dv \rightarrow \frac{\pi}{2}$, $g(x) = \int_0^x g'(v) dv = xC_1 - g'(x) \simeq \frac{\pi}{2}x$, $\frac{xg'(x)}{g(x)} \simeq 1$ für $x \rightarrow \infty$ streben, und deswegen etwa für $x > x_0$, $g'(x) < \pi$, $g(x) > \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)x$ gehalten werden. Daraus folgt für $\omega > x_0$

$$\int_\omega^x |\psi(x, v)| dv = \frac{1}{g(x)} \int_\omega^x |g'(x) - vg''(v)| dv < \frac{1}{x} \int_\omega^x \frac{\pi + 1}{\frac{\pi}{2} - 1} dv < K,$$

während natürlich $\int_0^\omega |\psi(x, v)| dv < K'$ ist. Also bleibt $\int_0^x |\psi(x, v)| dv$ noch beschränkt, damit dieses $\psi(x, v)$ sicher eine Toeplitzsche Transformation herstellt. Mit solches $g(x)$ steht Satz 1 doch fest.

18. Bei folgendes Beispiel nebst immer wechselndem $sg''(x)$ wird Satz 1 allerdings unannehmbar. Gegeben sei $g(x) = x + \sin x$, so daß $g'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, $g''(x) = -\sin x \geq 0$. Dann gilt $\frac{xg'(x)}{g(x)} = \frac{x(1 + \cos x)}{x + \sin x} \simeq 1 + \cos x$, so ist $\underline{\lim} = 0$, $\overline{\lim} = 2$ und $xg'(x)/g(x)$ beschränkt. Aber mit dieses $g(x)$ gestattet $\psi(x, v)$ keine Toeplitzsche Transformation. Es ist zwar

$$\int_0^x |\psi(x, v)| dv = \int_0^\omega + \int_\omega^x = (i) + (ii),$$

wobei mit genügend großes festes $\omega > x_0$ auch (i) beschränkt ist, aber doch nicht so für

$$(ii) \cong \frac{1}{x} \int_{\omega}^x |1 + \cos x + v \sin v| dv.$$

Denn, setzt man $\left[\frac{x}{2\pi}\right] = m$, $\left[\frac{\omega}{2\pi}\right] = n$, $\left[\frac{v}{2\pi}\right] = \nu$ und $v = 2\pi\nu + t$, so erhält man

$$(ii) \cong \frac{1}{x} \sum_{\nu=n}^m \int_0^{2\pi} |1 + \cos x + (2\nu\pi + t) \sin t| dt$$

$$> \frac{1}{x} \sum_{\nu=n}^m \left(\int_0^{\pi} \{1 + \cos x + (2\nu\pi + t) \sin t\} dt + \int_{\eta_{\nu}}^{\pi - \eta_{\nu}} \{-1 - \cos x + (2\nu\pi + t) \sin t\} dt \right),$$

wobei $\sin \eta_{\nu} = \frac{1 + \cos x}{2\nu\pi} < \varepsilon$ (beliebig klein) für $\omega > x_0$ (genügend groß) ist. Es sei $\eta = \text{Max}_{n < \nu < m} \eta_{\nu} (< 1/\nu\pi)$. Alsdann besteht

$$(ii) > \frac{2}{x} \sum_{\nu=n}^m \int_{\eta}^{\pi - \eta} (2\nu\pi + t) \sin t dt \cong \frac{2}{x} \sum_{\nu=n}^m 2\nu\pi \left[-\cos t \right]_{\eta}^{\pi - \eta}$$

$$\cong \frac{4\pi}{x} \left((m^2 - n^2) \cong \frac{x}{\pi} \left(1 - \frac{\omega^2}{x^2} \right) \rightarrow \infty \quad \text{für } x \rightarrow \infty; \right.$$

also ist $\int_0^x |\psi(x, v)| dv$ gewiß unbeschränkt. Daher kann nicht $\psi(x, v)$ eine Toeplitzsche, und Satz 1 nunmehr zulässig sein.

19. Auf Probe nehme ich die Stufenfunktion $[x]$ als $g(x)$ an. Es sei $[x] = n$ und $[u] = m$. Man erhält nach Definition

$$C_1-[x]-s(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{m}{n}\right) s'(u) du = \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \int_m^{m+1} s'(u) du$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right) \{s(m+1) - s(m)\} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n s(m).$$

Konvergiert nun dies für $x \rightarrow \infty$ nach demjenigen das $C_1-s(x)$ strebenden Wert, dessen Existenz vorausgesetzt ist? Ohne allgemeine Betrachtung erprobe ich es für den Fall $a = 0$, $s'(x) = e^{ix}$, $s(x) = i(1 - e^{ix})$, dessen C_1 -Limes ersichtlich i ist. Nun lautet

$$C_1-[x]-s(x) = \frac{i}{n} \sum_{m=1}^n (1 - e^{im}) = i - \frac{i}{n} \left(\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right) \rightarrow i$$

für $n = [x] \rightarrow \infty$. Also ist Satz 1 noch bejahend.

§ 3. Umgekehrt wollen wir den Übergang $\leftarrow$ von (2) beurteilen. Es sei aber jetzt vorausgesetzt, daß die Funktion $y = g(x)$ zwar eigentlich monoton wachsend ist, d.h. ohne beständig $g'(x) = 0$ zu sein, aber übrige Umstände bleibend wie in § 1 besagt. Alsdann ist ihre Umkehrfunktion $x = g^{-1}(y) = h(y)$ mit $h(b) = a$, $h(\infty) = \infty$ versehen, und wieder eigentlich monoton wachsend. Werden ferner $v = g(u)$ und $s(u) = s(h(v)) = S(v)$ gesetzt, so kommen

$$\begin{aligned}
C_{k-S}(x) &= \frac{k}{g(x)} \int_a^x \left(1 - \frac{g(u)}{g(x)}\right)^{k-1} s(u) g'(u) du \\
&= \frac{k}{y} \int_b^y \left(1 - \frac{v}{y}\right)^{k-1} S(v) dv \equiv C_{k-S}(y). \\
C_{k-S}(x) &= \frac{k}{x} \int_a^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{k-1} s(u) du \\
&= \frac{k}{h(y)} \int_b^y \left(1 - \frac{h(v)}{h(y)}\right)^{k-1} S(v) h'(v) dv \equiv C_{k-S}(y);
\end{aligned}$$

ins besondere

$$\begin{aligned}
C_{1-S}(x) &= \frac{1}{g(x)} \int_a^x s(u) g'(u) du = \frac{1}{y} \int_b^y S(v) dv = C_{1-S}(y), \\
C_{1-S}(x) &= \frac{1}{x} \int_a^x s(u) du = \frac{1}{h(y)} \int_b^y S(v) h'(v) dv = C_{1-S}(y).
\end{aligned}$$

Man braucht den Übergang zwischen folgenden Aussagen A und B :

$$(A) \quad C_{1-S}(x) = C_{1-S}(y) \rightarrow l, \quad (B) \quad C_{1-S}(x) = C_{1-S}(y) \rightarrow l$$

zu untersuchen. Nach Satz 1 kann man direkt schließen, daß

(I) Wenn $\overline{\lim} xg'(x)/g(x)$ endlich, und $sg g''(x)$ schließlich (etwa für $x > x_0$) ungeändert bleibt, so ist $A \rightarrow B$ wahr;

(II) Wenn $\overline{\lim} yh'(y)/h(y)$ endlich, und $sg h''(y)$ schließlich ungeändert bleibt, so ist $B \rightarrow A$ wahr.

Da aber offenbar $\frac{y}{h(y)} h'(y) = \frac{g(x)}{x} \frac{1}{g'(x)}$ ist, so gelten

$$\overline{\lim} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \left[\overline{\lim} \frac{yh'(y)}{h(y)} \right]^{-1} = M \leq \infty,$$

und

$$\underline{\lim} \frac{xg'(x)}{g(x)} = \left[\underline{\lim} \frac{yh'(y)}{h(y)} \right]^{-1} = m \geq 0,$$

Überdies haben $g''(x)$ und $h''(y)$ stets verschiedenes Zeichen, weil

$$\frac{h''(y)}{g''(x)} = -\frac{h'(y)}{g'(x)^2} = -\frac{h'(y)^2}{g'(x)}$$

sind. Deshalb falls eines von ihnen sein Zeichen bewahrt, so ist das andere ebenso beschaffen.

Aus diese Erwägungen kommt der folgende Satz hervor:

Satz 2. Die Bewahrenheit des Zeichens sei vorausgesetzt. Alsdann hat man folgende Alternierende:

(i) Im Falle $m > 0, M < \infty$ sind beide Übergänge $A \rightleftharpoons B$ wahr; d.h. C_1 - und C_{1-S} -Verfahren sind mit einander äquivalent.

(ii) Im Falle $m = 0, M < \infty$ kann nur der Übergang $A \rightarrow B$ festgestellt werden: das C_{1-S} -Verfahren ist umfassender als gewöhnliches C_1 -Verfahren.

(iii) Im Falle $m > 0$, $M = \infty$ ist nur der Übergang $B \rightarrow A$ wahrhaft, also wirkt solches C_1 -Verfahren schwächer als C_1 -Verfahren.

(iv) Im Falle $m = 0$, $M = \infty$ kann im allgemeinen nichts auf Übergänge $A \rightleftharpoons B$ besagt werden.

Ammerkung. Ist z.B. $a = 0$, $s(u) = (1 - e^{iu}) i$, so hat $C_{1-(x+1)} \log(x+1) - s(x)$ wie $C_{1-s(x)}$ denselben Limes i , während $C_{1-(e^x-1)-s(x)}$ keinen hat. Da aber für $a = 0$, $s(u) = \exp i e^u$ zwar $C_{1-(e^x-1)-s(x)} \rightarrow 0$ bei $x \rightarrow \infty$ strebt, soll es auch $C_{1-s(x)} \rightarrow 0$ sein. Nach Satz 2 erweitert kein $C_{1-g(x)}$ -Verfahren in Fällen (i) und (iii) das Geltungsgebiet über dasjeniges des C_1 -Verfahren hinaus. Das $C_{1-g(x)}$ -Verfahren im Falle (ii) allein dient den Konvergenzbereich zu erweitern.

§ 4. Zuletzt beweisen wir den

Satz 3. Es sei $g(x)$ irgendeine positive monoton gegen ∞ zunehmende Funktion⁵⁾. Dann kann es aus der Voraussetzung

$$C_{k-g(x)-s(x)} = \frac{k}{g(x)^k} \int_a^x [g(x) - g(u)]^{k-1} g'(u) s(u) du \rightarrow l \quad (x \rightarrow \infty)$$

immer zum Schluß

$$A_{-g(x)-s(x)} = \lambda \int_a^\infty \exp \{-\lambda g(u)\} g'(u) s(u) du \rightarrow l \quad (\lambda \rightarrow +0)$$

wohl gelingen.

Beweis. Wird das Parameter $\lambda = 1/g(x)$ genommen, damit zu $\lambda \rightarrow +0$ nun $x \rightarrow \infty$ entspricht, und

$$\exp \left\{ -\frac{g(u)}{g(x)} \right\} \frac{g'(u)}{g(x)} = \Phi(x, u)$$

gesetzt, so lautet $A_{-g(x)-s(x)} = \int_a^\infty \Phi(x, u) s(u) du$.

Offenbar ist $\Phi(x, u)$ Toeplitzsch. Setzt man ferner

$$\Psi(x, u) = \frac{1}{\Gamma(k+1)} \Phi(x, u) \left\{ \frac{g(u)}{g(x)} \right\}^k,$$

so kommt

$$\begin{aligned} & \int_a^\infty \Psi(x, u) C_{k-s(u)} du \\ &= \frac{1}{\Gamma(k+1)} \int_a^\infty \exp \left\{ -\frac{g(u)}{g(x)} \right\} \left\{ \frac{g(u)}{g(x)} \right\}^k \frac{g'(u)}{g(x)} du \int_a^u \frac{k \{g(u) - g(v)\}^{k-1}}{g(u)^k} g'(v) s(v) dv \\ &= \frac{1}{g(x)} \int_a^\infty g'(v) s(v) dv \int_v^\infty \exp \left\{ -\frac{g(u)}{g(x)} \right\} \left\{ \frac{g(u) - g(v)}{g(x)} \right\}^{k-1} \frac{g'(u)}{g(x)} \frac{du}{\Gamma(k)}. \end{aligned}$$

⁵⁾ Jetziges $g(x)$ ist ganz frei von der in vorigen Sätzen angelegten anderen Bedingungen, damit e. g. $xg'(x)/g(x)$ unbeschränkt, oder $sg''(x)$ beliebig wechselnd sein darf.

Das innere Integral kann durch die Substitution $\{g(u)-g(v)\}/g(x)=t$ sofort in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(k)} \exp \left\{ -\frac{g(v)}{g(x)} \right\} \int_0^\infty e^{-t} t^{k-1} dt = \exp \left\{ -\frac{g(v)}{g(x)} \right\}$$

gebracht werden. Folglich gilt

$$\int_a^\infty \Psi(x, u) \mathbf{C}_{k-s}(u) du = \int_a^\infty \exp \left\{ -\frac{g(v)}{g(x)} \right\} \frac{g'(v)}{g(x)} s(v) dv = \mathbf{A}_{-g(x)-s(x)}.$$

Ins besondere bei $s(u) = 1$ ergibt sich für $x \rightarrow \infty$

$$\int_a^\infty \Psi(x, u) du = \int_a^\infty |\Psi(x, u)| du \rightarrow 1,$$

und $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x, u) = 0$ gleichmäßig bei festes u , woraus folgt, daß $\Psi(x, u)$ wieder eine Toeplitzsche Transformation darstellt. Existiert deswegen $\mathbf{C}_{k-g(x)-s(x)} \rightarrow l$ für $x \rightarrow \infty$, so strebt ebenfalls $\mathbf{A}_{-g(x)-s(x)} \rightarrow l$ für $x \rightarrow \infty$ ($\lambda \rightarrow +0$), w. z. b. w.

Zusatz. Es sei gewöhnliches $\mathbf{C}_{k-s}(x)$ für $k \leq 1$ vorhanden und $= l$. Alsdann folgt bekanntlich $\mathbf{C}_{1-s}(x) \rightarrow l$. Befridigt $g(x)$ die Bedingungen (8) und (9), so folgt nach Satz 1, daß $\mathbf{C}_{1-s}(x) \rightarrow l$ und woraus wegen Satzes 3, daß $\mathbf{A}_{-g(x)-s(x)} \rightarrow l$.

Zum Schluß sei noch ein Beispiel beigelegt. Ersichtlich ist das Integral

$$s(x) = \int_1^x \frac{du}{u^{1-i}} = i(1-x^i) \quad (\text{wo } \arg u = 0 \text{ sei})$$

divergent für $x \rightarrow \infty$, und folglich weder $\mathbf{C}_1$ -limitierbar noch $\mathbf{A}$ -limitierbar, da $s'(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ gilt. Dessenungeachtet läßt sein $\mathbf{C}_1$ -log x -Limes sich festsetzen wie

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log x} \int_1^x s(u) \frac{du}{u} &= \frac{i}{\log x} \int_1^x \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^{1-i}} \right) du \\ &= i - \frac{x^i - 1}{\log x} \rightarrow i \quad \text{für } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Also genügt unser $\mathbf{C}_1$ -log x -Verfahren irgendwie der Erweiterungsbedingung. Sogar ist obiges $s(x)$ nach Satz 3 schon $\mathbf{A}$ -log x -limitierbar zu demselben Wert i (vgl. dazu meine vorstehende Note § 1). Daraus aber nicht folgt das Vorhandensein des gewöhnlichen $\mathbf{C}_1$ -Limes. Denn, für jetziges $g(x)$ ist zwar $\lim x g'(x)/g(x) = 0$, und also als zweite Fall von Satz 2 ist der Übergang $\mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_1$ allgemein unzulässig.