Journal of Gakugei, Tokushima University
Vol. IV, 1954

EINE VERALLGEMEINERUNG DES ABELSCHEN LIMITIERUNGSVERFAHREN BEI INTEGRALEN

Yoshikatsu WATANABE

Mathematische Institut, Gakugei Fakultät, Tokushima Universität.

(Eingegangen am 15, September 1953)

Das Abelsche Mittel für das Integral $s(x)=\int_a^x f(u)du$ wird gewöhnlich durch

$$(1)\qquad \lim_{\lambda\to+0}\int_a^\infty e^{-\lambda u}f(u)\,du=\lim_{\lambda\to+0}\lambda\int_a^\infty e^{-\lambda u}s(u)\,du\equiv\lim_{\lambda\to 0,\ u\to\infty}A(\lambda,u)$$

definiert. Es wird aber sich in gewißem Falle als zweckmäßig erweisen, dafür ein verallgemeinertes Mittel

$$(2)\qquad \lim_{\lambda\to 0,\ u\to\infty}A(\lambda,g(u))\equiv\lim_{\lambda\to+0}\int_a^\infty \exp\{-\lambda g(u)\}\,f(u)\,du$$
$$=\lim_{\lambda\to+0}\lambda\int_a^\infty \exp\{-\lambda g(u)\}\,g'(u)\,s(u)\,du$$

zu annehmen, wobei $g(u)(=v)$ irgendeine monoton zunehmende reelle positive Funktion mit $\lim_{u\to\infty}g(u)=\infty$ ist. Dies ist offenbar eine spezielle Toeplitzsche Transformation, weil die dazu notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$\lim_{\lambda\to+0}\lambda\int_a^\infty \exp\{-\lambda g(u)\}\,g'(u)\,du=1,$$
$$\lambda\int_a^\infty |\exp\{-\lambda g(u)\}\,g'(u)|\,du<K\qquad \text{für}\quad 0<\lambda\leq\lambda_0,$$

und $$\lim_{\lambda\to+0}\lambda\exp\{-\lambda g(u)\}\,g'(u)=0\qquad\text{bei festes } u,$$

sämtlich stets bestehen. Folglich erfüllt es die Permanenzbedingung, daß jedesmal $A(\lambda,g(u))\to l$ strebt, wenn $\lim_{u\to\infty}s(u)=l$ vorhanden ist. Freilich ist die Umkehrfunktion $u=g^{-1}(v)$ wieder positiv monoton zunehmend mit $\lim_{v\to\infty}g^{-1}(v)=\infty$. Wenn hiernach

$$f(u)\,du=f(g^{-1}(v))\,(g^{-1}(v))'\,dv=f_1(v)\,dv$$

und $$s(x)=\int_a^x f(u)\,du=\int_{g(a)=b}^{g(x)=y}f_1(v)\,dv=s_1(y)$$

gesetzt wird, so wird

$$\lim A\ g(u)\ s(x)=\lim_{\lambda\to+0}\int_b^\infty e^{-\lambda v}f_1(v)\,dv=\lim_{\lambda\to+0}\lambda\int_b^\infty e^{-\lambda v}s_1(v)\,dv,$$

was mit dem gewöhnlichen Abelschen Mittel (1) übereinstimmt. Trotzdem ist unser neues Mittel (2) bisweilen vielmehr noch bequemer, wie unten gezeigt wird.

§ 1. Wir wollen zuerst dartun, daß unser neuer Limes (2) tatsächlich der Erweiterungsbedingung genügt: Es ist nämlich bei Knopp[1] hingeweist worden, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\beta i}}\ (\beta \gtrless 0)$ nicht konvergiert, und folglich weder Cesàrosches noch Abelsches Mittel haben kann. Ganz ebenso verhält sich das Integral $\int_1^{\infty}\frac{du}{u^{1-\beta i}}\ (\beta \gtrless 0)$; d. h. es ist weder konvergent noch Cesàro-, noch Abel-limitierbar in gewöhnlichen Sinne.[2] Trotzdem hat das fragliche Integral wirklich ein verallgemeinertes Abelsches Mittel. In der Tat wird bei $g(u)=\log u$ mit $\arg u=0$ unser neues Mittel

$$\int_1^{\infty}\exp\{-\lambda\log u\}\frac{du}{u^{1-\beta i}}=\int_1^{\infty}u^{-\lambda-1+\beta i}\,du=\left[\frac{u^{-\lambda+\beta i}}{-\lambda+\beta i}\right]_1^{\infty}\qquad(\lambda>0),$$

damit das betreffende Integral als sein $\boldsymbol{A}$-log-Mittel den Wert i/β hat. Ebensowohl gilt

$$\int_0^1\exp\{-\lambda|\log u|\}\frac{du}{u^{1-\beta i}}\to\frac{-i}{\beta}\qquad\text{bei}\quad\lambda\to+0,$$

und daher ist

$$\lim_{\lambda\to+0}\int_0^{\infty}\exp\{-\lambda|\log u|\}\frac{du}{u^{1-\beta i}}=0. \tag{3}$$ [3]

Ein noch annehmbares Beispiel ist $\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{u}\right)u^{-1-\beta i}\,du$, wo $\beta\gtrless 0$ und $\arg u=0$ ist. Da hier der Integrand $=O(u^{-1})$ für $u\to\infty$ bleibt, so ist das Integral weder konvergent, noch C_k-limitierbar für jedes $k>0$, noch A-limitierbar in üblichem Sinne. Trotzdem ist es zwar $\boldsymbol{A}$-log-limitierbar. Denn, wird $u=1/t$ gesetzt, so folgt für $\lambda>0$

$$\int_0^{\infty}\exp\left\{-\lambda\log u-\frac{1}{u}\right\}u^{-1-\beta i}\,du=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\lambda-1+\beta i}\,dt=\Gamma(\lambda+\beta i). \tag{4}$$

Daher ist der gesuchte $\boldsymbol{A}$-log-Limes eben $\Gamma(\beta i)$.

---

1) K. Knopp, Unendliche Reihen, zweite Auflage, S. 487.

2) Y. Watanabe, Das Abelsche Limitierungsverfahren bei Integralen, Japanese Journal of Mathematics, Vol. IX (1932), S. 177-197. Aber besser vergleiche man die berümte Arbeit von J. Karamata; Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen, Journal für reine und angewandte Mathematik, Vol. 164 (1931), S. 27-39.

3) Vgl. unten den Fall I in § 2.

Es sei nun bemerkt, daß für unseren neuen Abelschen Limes die bekannte Tauber-Karamatasche Satz (Umkehrung des Abelschen Satzes) etwas anders ausgedrückt werden soll; d. h. aus $\lim_{\lambda\to 0}\int_a^\infty \exp\{-\lambda g(u)\} f(u)\,du = l$, aber nicht mit $f(u) = O\left(\frac{1}{u}\right)$, sondern unter Bedingung $f(u) = O(g'(u)/g(u))$ bei $u\to\infty$, der Schluß $\int_a^\infty f(u)\,du = l$ folgt. Ist nämlich $g(u) = v$, so wird $f(u) = f(g^{-1}(v))$ $(g^{-1}(v))' \dfrac{dv}{du} = f_1(v) g'(u)$ und demnach $f(u) = O\left(\frac{1}{v}\right) g'(u) = O\left(\frac{g'(u)}{g(u)}\right)$ sein soll.

§ 2. Ich überlege mir als zweites Beispiel das Integral

$$\int_\varepsilon^\omega u^{\alpha-1+\beta i}\,du \tag{5}$$

wobei $\alpha \gtreqless 0$, $\beta \gtrless 0$ mit $\arg u = 0$, $\varepsilon \to 0$, $\omega\to\infty$ sind. Oder, wird $u = e^v$ gesetzt, so kommt

$$\int_{\log\varepsilon}^{\log\omega} \exp\{\alpha v + \beta v i\}\,dv, \qquad \log\varepsilon \to -\infty,\ \log\omega \to +\infty, \tag{6}$$

welches zugleich drittes Beispiel darbietet. Eine formale Integration liefert

$$\frac{1}{\alpha+\beta i}\Big[u^{\alpha+\beta i}\Big]_\varepsilon^\omega = \frac{1}{\alpha+\beta i}\Big[\exp\{(\alpha+\beta i)\log u\}\Big]_\varepsilon^\omega,$$

so daß entweder für $\omega\to\infty$ bei $\alpha > 0$, oder für $\varepsilon \to +0$, bei $\alpha < 0$ der absolute Betrag des Reel- bezw. Imaginär-Teil zwischen immer großer werdenden positiven und negativen Grenzen hin- und herpendelt, während bei $\alpha = 0$ für $\omega\to\infty$ sowie $\varepsilon\to +0$ noch ∞ mal endlich schwingt. Auch wird das gewöhnliche Abelsche Mittel (1) bei $\alpha > 0$ durch

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha-1+\beta i}\,du = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1+\beta i}\,dt/\lambda^{\alpha+\beta i} \qquad (t = \lambda u)$$
$$= \Gamma(\alpha+\beta i)/\lambda^{\alpha+\beta i}$$

gegeben, was bei zu $+0$ abnehmenden λ wieder unendlich groß schwingend wird; Oder, wenn man auch $u = e^v$ in das Integral einsetzt und berechnet

$$\int_{-\infty}^\infty \exp\{(-\lambda+\alpha+\beta i)v\}\,dv = \left[\frac{\exp(-\lambda+\alpha+\beta i)v}{-\lambda+\alpha+\beta i}\right]_{-\infty}^\infty$$

daraus aber wird gar nichts.

Nun spielt unser neues $\boldsymbol{A}$-v^2-Mittel eine vorherrschende Rolle: Es ist nämlich

$$A(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda v^2} e^{\alpha v+\beta v i}\,dv$$

$$=\exp\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i}{4\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\lambda\left(v-\frac{\alpha}{2\lambda}\right)^2+i\beta\left(v-\frac{\alpha}{2\lambda}\right)\right\}dv\,.$$

Wenn man in dem Integral $v-\dfrac{\alpha}{2\lambda}=x$ einführt, ~~und das Integral im Cauchyschen Sinne versteht,~~ ~~4)~~ so erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\exp\left\{-\frac{\beta^2}{4\lambda}\right\},\qquad(\lambda>0)$$

wie man leicht mit Benutzung der Cauchyschen Integration funktionentheoretischweise erweisen kann. Tatsächlich ist die komplexe Funktion $f(z)=\exp\{-\lambda z^2\}$ von $z=x+yi$ regulär in dem durch vier Seiten $y=0$,
$\lambda=R'$ $x=\pm R$ und $y=\beta i/\lambda$ geschlossenen rechteckigen Bereiche, so daß das über den Rand C des Rechteckes erstreckte Integral $\oint f(z)\,dz=0$ wird, und woraus für $R\to\infty$ R' die obige Formel sofort folgt. Demnach gilt für $\lambda>0$

(7) $$A(\lambda)=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\exp\frac{\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i}{4\lambda},$$

und dies strebt gegen Null für $\lambda\to+0$, falls $\alpha^2<\beta^2$ ist. Also ist das A-v^2-Mittel des Integrales $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\alpha v+\beta v i)\,dv$ gleich 0; Oder wird das A-$(\log u)^2$-Mittel des Integrales $\int_0^{\infty}u^{\alpha-1+\beta i}\,du$ gleich 0, falls $|\alpha|<|\beta|$ ist.

§ **3.** Bisher hat man stillschweigend vorausgesetzt, daß der Parameter λ bloß reel positiv und gegen Null strebend sei. Aber doch es kann weiter

---

~~4)~~ Wenn hier $\int_{-\infty}^{\infty}$ als $\lim\limits_{R\to-\infty,\,R'\to\infty}\int_R^{R'}$ verstanden wird, so bringt es auf neue Rechnung:

$$A(\lambda)=\exp\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i}{4\lambda}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x^2}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\,dx$$

$$\lim_{R'\to\infty}\int_0^{R'}=\exp\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2}{4\lambda}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}+\frac{i}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\beta/2\sqrt{\lambda}}e^{y^2}dy\right].$$

Daher strebt bei $\alpha^2<\beta^2$ für $\lambda\to+0$ das mit dem reellen Teil im Klammern multiplizierte Glied noch gegen 0, was aber bei dem imaginären Teil nicht der Fall ist. Denn, es ist

$$\lim\exp\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i-\beta^2}{4\lambda}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{\beta/2\sqrt{\lambda}}e^{y^2}\,dy=\lim\exp\frac{\alpha^2+2\alpha\beta i}{4\lambda}\lim\int_0^{\beta/2\sqrt{\lambda}}e^{y^2}dy\Big/\sqrt{\lambda}\,e^{\beta^2/4\lambda},$$

worin der zweite Faktor $$=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{\lambda\to+0}\frac{e^{\beta^2/4\lambda}\left(-\beta/4\lambda\sqrt{\lambda}\right)}{e^{\beta^2/4\lambda}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}}-\dfrac{\beta^2}{4\lambda\sqrt{\lambda}}\right)}=\frac{1}{\beta}$$

strebt, während der erste Faktor $\exp\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta i}{4\lambda}$ für $\lambda\to+0$, noch unendlich schwingend wird, sofern $\alpha\beta\neq0$ ist.

folgendermaßen verallgemeinert werden. Ist $\lambda = \xi + \eta i$ komplex, so folgt

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}{4\lambda} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\,\xi + 2\alpha\beta\eta + [2\alpha\beta\xi - (\alpha^2 - \beta^2)\,\eta]\,i}{4(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Nun, solange $\Re\lambda > 0$ ist, existiert das Integral $A(x) = \int_{-}^{\infty} e^{-\lambda v^2} e^{\alpha v + \beta v i}\, dv$ in der komplexen λ-Ebene, während in die längs negativer Reelachse gesperrten λ-Ebene der Ausdruck $\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \exp \frac{\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i}{4\lambda}$ sich eindeutig regulär verhält. Aber wegen (7) stimmen diese zwei Funktionen längs Wegstückchens $\lambda = \xi > 0$ überein. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung gilt daher (7) allgemein auch in der Halbebene $\Re\lambda > 0$. Also erhält man

$$(8) \qquad |A(\lambda)| = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\,\xi + 2\alpha\beta\eta}{4(\xi^2 + \eta^2)}, \qquad (\Re\lambda > 0)$$

wie auch $\lambda = \xi + \eta i$ $(\xi > 0)$ und $\gamma = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ immer gegeben werden mögen. Wir wollen jetzt diese möglichen einzelnen Fälle umständlich untersuchen.

Fall I. $\alpha = 0$, $\beta \gtrless 0$. Es strebt wegen (8)

$$(9) \qquad |A(\lambda)| = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp \left\{ \frac{-\beta^2 \xi}{4|\lambda|^2} \right\} \to 0 \qquad \text{für} \quad \lambda = \xi \to 0.$$

Überdies bleibt die Beziehung (9) auch dann noch gültig, wenn die komplexe Variable λ bei der Annäherung an 0 auf den im Innern der rechten Halbebene liegenden Winkelraume beschränkt ist, der von zwei Strahlen $\eta = \pm \xi \cot \delta$ (wo $\delta > 0$ beliebig klein ist) gebildet wird (das punktierte Bereich in Fig. I). Ist nämlich $\{\lambda = |\lambda| e^{i\theta}\}$ irgendeine beliebige Punktfolge, die in dem genannten Winkelraum liegt und gegen 0 rückt, so wird

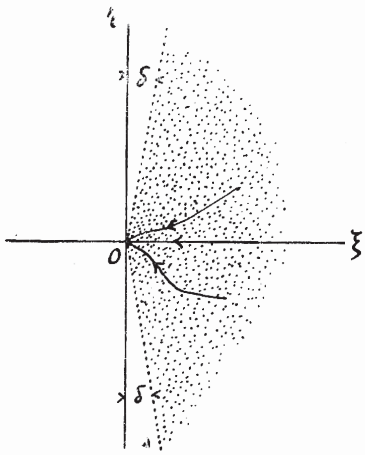

Fig. I ($\alpha = 0$, $\beta \gtrless 0$)

$$|A(\lambda)| = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp \left\{ \frac{-\beta^2 \cos\theta}{4|\lambda|} \right\}.$$

Da aber hierin $\frac{\beta^2}{4} \cos\theta > \frac{\beta^2}{4} \sin\delta = \kappa$ fest und > 0 bleibt, so ist

$$|A(\lambda)|<\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\exp\left\{-\frac{\kappa}{|\lambda|}\right\}$$

und folglich es strebt gleichmäßig gegen 0 für $\lambda\to 0$.

Fall II. $|\alpha|=|\beta|$, $\alpha\beta\lesseqgtr 0$. In diesem Falle aus (8) ergibt sich

$$|A(\lambda)|=\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\exp\left\{\frac{\mp\alpha^2\eta}{2|\lambda|^2}\right\},$$

je nachdem das Produkt $\alpha\beta\lesseqgtr 0$ ist. Rückt nun $\eta=|\lambda|\sin\theta$ gegen 0 in dem oberen bezw. unteren Winkelraume, der durch je zwei von Strahlen $\eta=\pm\xi\cot\delta$ und $\eta=\pm\xi\tan\delta$ ($\delta>0$ beliebig klein) gebildet wird (Fig. II), so strebt ebenso auch $A(\lambda)\to 0$. Denn, alsdann gilt

$$\begin{aligned}|A(\lambda)|&=\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\exp\left\{\mp\frac{\alpha^2\sin\theta}{2|\lambda|}\right\}<\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\exp\left\{\frac{-\alpha^2\sin\delta}{2|\lambda|}\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}}\exp\left\{-\frac{\kappa}{|\lambda|}\right\}\to 0 \qquad \text{für}\quad \lambda\to +0.\end{aligned}$$

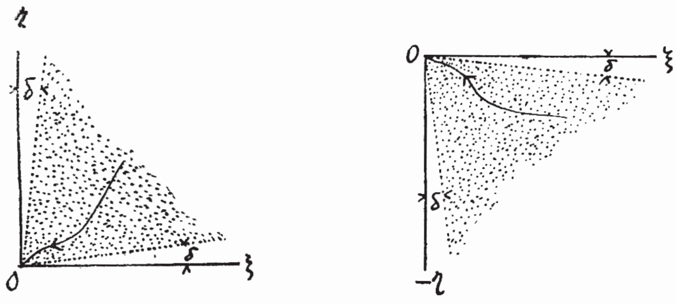

Fig. II ($|\alpha|=|\beta|$, $\alpha\beta\lesseqgtr 0$)

Fall III. $\beta^2>\alpha^2$, $\alpha\beta\gtreqless 0$. Man bestimme aus $\tan\psi=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}$ den Winkel ψ, derart, daß bei $\alpha\beta\gtreqless 0$ bezw. $0<\pm\psi<\dfrac{\pi}{2}$ gilt. Dreht man die λ $(=\xi+\eta i)$-Ebene um den Winkel $\varphi=\psi\mp\dfrac{\pi}{2}$ mit $\lambda=0$ als festbleibenden Drehpunkt, so erhält man

$$\begin{aligned}\xi&=\xi'\cos\varphi-\eta'\sin\varphi=\pm\xi'\sin\psi\pm\eta'\cos\psi,\\ \eta&=\xi'\sin\varphi+\eta'\cos\varphi=\mp\xi'\cos\psi\pm\eta'\sin\psi,\end{aligned}$$

wodurch das Zahlenpaar (ξ,η) auf (ξ',η') transformiert wird. Denkt man sich jetzt jeden zu beiden Halbebenen $\xi>0$, $\xi'>0$ gemeinsamen Winkelraum, der von je zwei der Strahlen $\eta=\mp\xi\cot\delta$, $\eta'=\pm\xi'\cot\delta$ gebildet wird (Fig. III), so erkennt man wieder, daß

$$|A(\lambda)| < \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp\left\{-\left|\frac{\alpha\beta}{2\lambda}\right| \frac{\sin\delta}{\cos\psi}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{|\lambda|}\right\} \to 0$$

für $\lambda \to 0$ strebt.

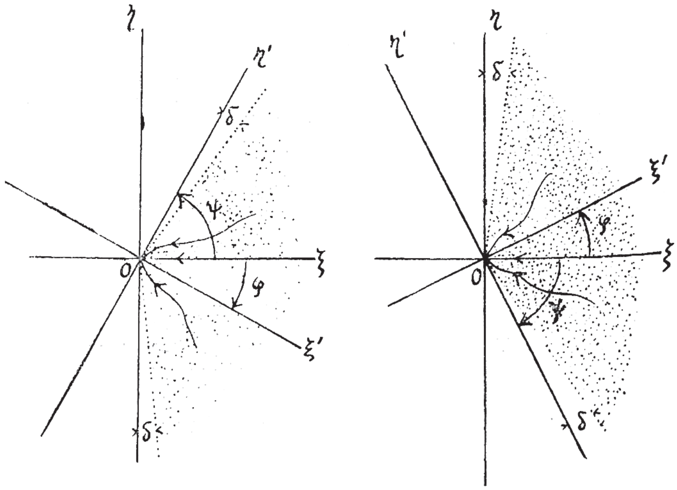

Fig. III $(\beta^2 > \alpha^2,\ \alpha\beta \gtrless 0)$

Fall IV. $\alpha^2 > \beta^2$, $\alpha\beta \lessgtr 0$. Man betrachte wieder das Innere des zu beide Halbebenen $\xi > 0$, $\xi' > 0$ gemeinschaftlich genommenen Teil, wie in Fall III, und den dort liegenden analogen (aber jetzt scharfeckigen) Winkel-

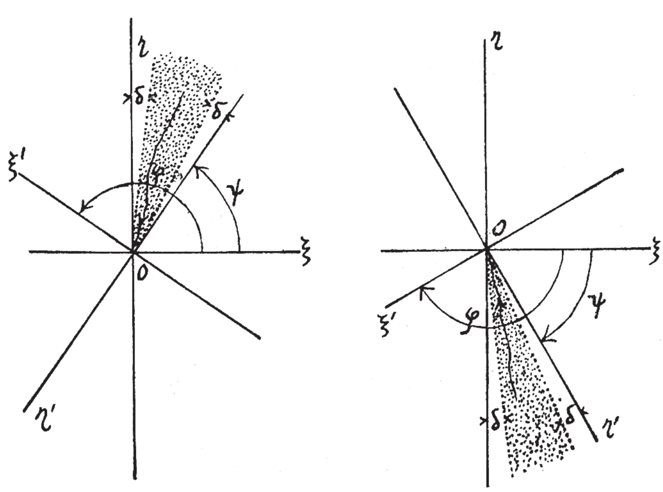

Fig. IV $(\alpha^2 > \beta^2,\ \alpha\beta \gtrless 0)$

raum (Fig. IV). Läßt man nämlich den Drehungswinkel bis zu $\varphi = \psi \pm \frac{\pi}{2}$ mit $\tan\psi = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta}$ betragen, so gilt nochmals

$$|A(\lambda)| < \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp\left\{-\left|\frac{\alpha\beta}{2\lambda}\right|\frac{\sin\delta}{\cos\psi}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{|\lambda|}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{|\lambda|}\right\} \to 0$$

für $\lambda \to +0$.

Fügt man alle obige Ergebnisse zusammen, so lehren sie, daß

$$(10) \qquad \begin{cases} A\text{-}v^2\text{-}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\alpha v + \beta v i)\, dv = 0\,, \\ A\text{-}(\log u)^2\text{-}\int_0^{\infty} u^{\alpha-1+\beta i}\, du = 0\,, \end{cases} \qquad (\beta \gtrless 0,\ \alpha \gtreqqless 0)$$

gilt, wenn $\lambda = \xi + \eta i$ längs gewißes Weges gegen 0 strebt.

§ 4. Gelegentlich betrachte ich als viertes Beispiel das Integral

$$(11) \qquad \int_\varepsilon^\omega u^{\alpha-1} e^{i\beta u}\, du \qquad \text{für} \quad \varepsilon \to +0\,,\ \omega \to +\infty\,,$$

wobei $\alpha = n + \gamma > 0$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ und $0 \leqq \gamma \leqq 1$, $\beta \gtrless 0$ sind.[5] Bekanntlich hat dies schon eine C_k-Summe ($k > \alpha$), und folglich auch gewöhnliches Abelsches Mittel. In der Tat erlaubt das Abelsche Mittel bei $\alpha > 1$ eine Teilweise-Integration:

$$A(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha-1} e^{\beta u i}\, du = \left[\frac{u^{\alpha-1} e^{-\lambda u + \beta u i}}{-\lambda + \beta i}\right]_0^\infty + \frac{\alpha-1}{\lambda - \beta i} \int_0^\infty e^{-\lambda u + \beta u i} u^{\alpha-2}\, du\,,$$

worin der integrierte Teil wegen $\Re\lambda > 0$, $\alpha > 1$ verschwindet.[6] Also ergibt sich nach n maligen wiederholten partiellen Integrationen

$$(12) \qquad A(\lambda) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(\lambda-\beta i)^n} \int_0^\infty e^{-\lambda u + \beta u i} u^{\gamma-1}\, du\,,$$

und daraus folgt bei $\gamma = 1$, $\alpha = n+1$ bereits das Resultat, daß

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^n e^{\beta u i}\, du = \frac{n!}{(\lambda-\beta i)^{n+1}} \to \frac{\Gamma(n+1)}{(-\beta i)^{n+1}} \qquad \text{für} \quad \lambda \to 0$$

strebt. Andererseits gilt bei $0 < \gamma < 1$

$$(14) \qquad \int_0^\infty u^{\gamma-1} e^{i\beta u}\, du = \frac{\Gamma(\gamma)}{\beta^\gamma} \exp\frac{\pi}{2}\gamma i\,.$$

Denn, die Funktion $f(z) = z^{\gamma-1} e^{-\beta z}$ $(0 < \gamma < 1,\ \beta > 0)$ ist regulär in demjenigen Bereich S, der durch zwei Stücke $0 < \rho \leqq x < R$ bezw. $0 < \rho \leqq y \leqq R$ auf Reel- bezw. Imaginär-Achse und zwei erste Quadranten der Kreisen

---

5) Im Falle $\alpha \leqq 0$ wird das Integral bestimmt $+\infty$.

6) Im Falle $\alpha=1$ gilt schon $A(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda - i\beta} \to \dfrac{i}{\beta}$ für $\lambda \to 0$; d. h. $\lim\limits_{\lambda \to +0} \int_0^\infty e^{-\lambda u} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\, \beta u\, du = \begin{cases} 0, \\ 1/\beta. \end{cases}$

$|z| = \rho \to 0$, $|z| = R \to \infty$ umgeschlossen wird. Aus das Verschwinden von dem über den Umfang C des Bereiches S erstreckten Cauchyschen Integral folgt ohne weiteres die Formel (14).

Durch Einsetzung in (12) aus (14) erhält man das gesuchte Abelsche Mittel:

$$\lim_{\lambda \to +0} \int_0^\infty e^{-\lambda u} u^{\alpha-1}(\cos \beta u + i \sin \beta u)\, du = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} \exp \frac{\pi}{2} \alpha i\,, \tag{15}$$

wobei wegen $\alpha = n + \gamma$ der Faktor $\exp \frac{\pi}{2} \alpha i = i^n \exp \frac{\pi}{2} \gamma i$ wird. Z. B. ist für ganzzahliges α

$$A\text{-}\int_0^\infty u^{2p} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta u \, du = \begin{cases} 0 \\ (-1)^p \underline{|2p}/\beta^{2p+1} \end{cases} \qquad \text{bei} \quad \alpha = 2p+1\,,$$

oder

$$A\text{-}\int_0^\infty u^{2p-1} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \beta u \, du = \begin{cases} (-1)^p \underline{|2p-1}/\beta^{2p} \\ 0 \end{cases} \qquad \text{bei} \quad \alpha = 2p\,.$$

Ich erwünschte, aber vergebens, das $\boldsymbol{A}\text{-}e^{e^x}$-Mittel des Integrales[7]

$$\int_0^\infty e^{\alpha x} x^{\beta i}\, dx \equiv \int_0^\infty \exp\{\alpha x + i\beta \log x\}\, dx \qquad (\alpha > 0,\ \beta \gtrless 0) \tag{17}$$

zu finden, was ich noch vielleicht als 0 vermutet habe.

7) Man kann $\alpha = 1$ annehmen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit; Oder wird $e^x = t$ gesetzt, so wird es lediglich $\int_1^\infty (\log t)^{\beta i}\, dt$, eine scheinbar sehr einfache Gestalt.