Ueber die Verschiebung der Nullstellen einiger Funktionen, welche aus Integration gebrochener Ordnung hervorgeht.

Yoshikatsu WATANABE.

Mathematische Institut, Gakugei Fakultät, Tokushima Universität.

(Eingegangen am 30. September, 1952.)

Es sei $f(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen z und α reell positiv. Man hat das Riemann-Liouvillesche Integral

$$J^\alpha f(z) = \int_0^z \frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)du,$$

das für gebrochenes α allgemein mehrdeutig ist. Betrachten wir nun

$$g(z) = z^{-\alpha} J^\alpha f(z) \equiv H^\alpha f(z),$$

so erhalten wir eine analytische Funktion, deren Existenzgebiet eben mit demselben von $f(z)$ übereinstimmt. Gestattet nämlich $f(z)$ eine Taylorsche Entwicklung um $z=0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n/\Gamma(n+1),$$

so lautet

$$g(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n z^n/\Gamma(n+\alpha+1).$$

Dafür aber gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|/\Gamma(n+1)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|/\Gamma(n+\alpha+1)},$$

und folglich besitzen beide Reihen dieselben Konvergenz- bezw. Fortsetzbarkeit-Eigenschaften. Inzwischen veranläßt unsere Verfahren gewißermaßen eine Veränderung der Nullstellen-Verteilung. Ist beispielsweise $f(z)=e^z$, so ergibt sich

$$g(z) = H^\alpha e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{1+\frac{z}{\alpha+1}+\frac{z^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\cdots\cdots\right\}.$$

Diese Funktion wird zwar wieder ganz transcendental, aber doch verschwindet in gewißen Punkten der Halbebene $\Re z \gtrless \alpha-1$, je nachdem $\alpha>1$ oder $1>\alpha>0$ ist, wie ich unten elementarweise zeigen werde(1).

§ **1.** Eine gerade Rechnung liefert sofort

$$H^\alpha e^z = \frac{1}{z^\alpha} J^\alpha e^z = \frac{1}{z^\alpha}\int_0^z \frac{(z-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^\zeta d\zeta = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad (\alpha>0). \tag{1}$$

(1) Man vergleiche für etwas ausgearbeiteten Beweis, Pólya und Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. II S. 70, S. 260.

Ins besondere gilt für $\alpha=1$

$$He^z=\frac{1}{z}(e^z-1)\,,$$

was in den auf der imaginären Achse liegenden Punkten $z=2n\pi i$ verschwindet, wo n ganz $\neq 0$ ist. Auch für jedes reelle x ist im allgemeinen

$$H^\alpha e^x = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{xt}\, dt > 0\,,$$

so daß auf der reellen Achse es keine Nullstelle gibt. Anderseits, falls $z_0=r_0 \exp i\theta_0$ eine Nullstelle ist, so muß $\bar{z}_0=r_0 \exp(-i\theta_0)$ auch dieselbe sein. Deshalb darf ich unten mich nur auf den Fall beschränken, worin $0<\theta(=\arg z)<\pi$, d. h. der imaginäre Teil $y>0$ ist.

Setzt man nun in (1) $z=re^{i\theta}$, $\zeta=\rho e^{i\theta}$ (θ fest), so erhält man

$$H^\alpha e^z = \frac{1}{r^\alpha}\int_0^r \frac{(r-\rho)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp\{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\}\, d\rho\,,$$

oder, indem man nochmals $\rho\sin\theta=\eta$, $r\sin\theta=y$, $\cot\theta=c$ einführt,

$$\begin{aligned} H^\alpha e^z &= \frac{1}{y^\alpha}\int_0^y \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{c\eta}\,(\cos\eta+i\sin\eta)\, d\eta \\ &= U+iV=W. \end{aligned} \tag{2}$$

Die hier in dem Integranden auftretende Funktion $(y-\eta)^{\alpha-1}e^{c\eta}=Y$ ist non-negativ im Intervalle $0\leqq\eta\leqq y$, und erlaubt für festes y

$$\frac{\partial Y}{\partial\eta}=(y-\eta)^{\alpha-2}e^{c\eta}\Big[\Re(z-\zeta)-(\alpha-1)\Big]\,,\quad \text{wo}\quad \Big|\Re(z-\zeta)\Big|\leqq\Big|\Re(z)\Big| \quad \text{ist.}$$

Hieraus fließt die Folgerung, daß für $\alpha>1$ bei $\Re z<\alpha-1$, $\frac{\partial Y}{\partial\eta}<0$ gilt und $Y(\geqq 0)$ nimmt stets ab, wenn η zunimmt, während für $0<\alpha<1$ bei $\Re z>\alpha-1$, $\frac{\partial Y}{\partial\eta}>0$ und $Y(>0)$ monoton zunimmt.

§ 2. Falls zuerst $\alpha>1$, $\Re z=x<\alpha-1$, so daß Y monoton fallend ist, schreibe ich

$$\begin{aligned} V=\Im H^\alpha e^z &= \frac{1}{y^\alpha}\int_0^y \frac{(y-\eta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, e^{c\eta}\sin\eta\, d\eta = \frac{1}{y^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^y Y\sin\eta\, d\eta \\ &= \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \cdots\cdots + \int_{p\pi}^y \quad \text{mit}\quad y=(p+\varepsilon)\pi\,,\ 0\leqq\varepsilon<1 \\ &= v_1-v_2+\cdots\cdots\cdots+(-1)^{p-1}v_p+(-1)^p v'_{p+1}, \end{aligned}$$

wo $v_1>v_2>\cdots>v_p>v'_{p+1}\geqq 0$ sind. Daher gelten, sowohl für $p=2q-1$ als $p=2q$

$$\begin{aligned} \int_0^y &= (v_1-v_2)+(v_3-v_4)+\cdots\cdots+(v_{2q-1}-v'_{2q})>0 \\ &= (v_1-v_2)+(v_3-v_4)+\cdots\cdots+(v_{2q-1}-v_{2q})+v'_{2q+1}>0\,. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also in der Linke der Gerade $x=\alpha-1(<0)$ durchaus $\Im H^\alpha e^z>0$, somit es dort keine Nullstelle gibt. Aber bei $\alpha=1$ zwar verschwindet $W=U(x, y, \alpha)+iV(x, y, \alpha)$ im Punkt $P(x=0, y=2n\pi, n\neq 0)$, während in demselben Punkte die Determinante

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial x} \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$$

den positiven Wert $1/4n^2\pi^2$ annimmt. Es leuchtet hieraus wegen eines wohlbekannten Satzes ein, daß durch jeden Punkt $P(0, 2n\pi)$ in der z-Ebene je eine Kurve $U(x,y,\alpha)=0$, $V(x,y,\alpha=0$ existiert, und daß für $\alpha<1$ alle diese in der Rechte der Gerade $x=\alpha-1$ liegen sollen.

§ **3.** Um den Falle $1>\alpha>0$ zu behandeln, schicke ich folgende triviale Lemata voraus:

Lemma 1. Mit der konstanten Summe $2c$ zweier positiver Zahlen a und b wird das Produkt ab maximal bei $a=b=c$. Das Produkt ist je größer mit je kleiner Differenz; d.h. wenn $a_1+b_1=a_2+b_2=2c$ und $|a_1-b_1|<|a_2-b_2|$ sind, so besteht $a_1b_1>a_2b_2$. Dies ist klar, wegen der Identität $ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]=c^2-\frac{1}{4}(a-b)^2$.

Lemma 2. Sind a_1, b_1, a_2, b_2 alle positiv und $a_1b_1>a_2b_2$ sowie $|a_1-b_1|>|a_2-b_2|$, so folgt $(a_1+b_1)^2>(a_2+b_2)^2$ und deshalb auch $a_1+b_1>a_2+b_2$.

Da nun für $1>\alpha>0$, $x>\alpha-1$, die Funktion Y monoton wächst, gilt folgendes:

$$U=\Re H^\alpha e^z=\frac{1}{y^\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^y Y\cos\eta\, d\eta$$
$$=\int_0^\pi+\int_\pi^{2\pi}+\cdots\cdots+\int_{(p-1)\pi}^{p\pi}+\int_{p\pi}^y \quad \text{mit } y=(p+\varepsilon)\pi\,,\ 0\leqq\varepsilon<1$$
$$=-v_1+v_2-\cdots\cdots+(-1)^p v_p+(-1)^{p+1}v'_{p+1}\,,$$

wo offenbar $v_1, v_2,\cdots\cdots,v_p>0$ und $v'_{p+1}\gtrless 0$ sind. Überdies ist die Folge $v_1, v_2,\cdots\cdots$ sogar monoton wachsend. Zum Beweis dafür setzt man zuerst

$$\eta=h\pi+\tau\quad(0<\tau<2\pi)\,,\ y-h\pi=t>2\pi\quad\text{und}\quad 1-\alpha=\beta>0\,,$$

dann ergibt sich

$$\int_{h\pi}^{(h+2)\pi}\frac{1}{(y-\eta)^\beta}e^{c\eta}\cos\eta\, d\eta=(-1)^h e^{ch\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{(t-\tau)^\beta}e^{c\tau}\cos\tau\, d\tau\,.$$

Das letztere Integral kann beschrieben werden wie folgt:

$$\int_0^{\pi/2}\left[\frac{e^{c\tau}}{(t-\tau)^\beta}-\frac{e^{c(\pi-\tau)}}{(t-\pi+\tau)^\beta}-\frac{e^{c(\pi+\tau)}}{(t-\pi-\tau)^\beta}+\frac{e^{c(2\pi-\tau)}}{(t-2\pi+\tau)^\beta}\right]\cos\tau\, d\tau$$
$$=\int_0^{\pi/2}(Y_1-Y_2-Y_3+Y_4)\cos\tau\, d\tau\,.$$

Nennt man $a_1=t-\tau$, $b_1=t-2\pi+\tau$ und $a_2=t-\pi+\tau$, $b_2=t-\pi-\tau$, so ergeben sich $a_1+b_1=a_2+b_2=2t-2\pi(>0)$ und $a_1-b_1=2\pi-2\tau$, $a_2-b_2=2\tau$, wo $0<2\tau<\pi$ ist, daraus $a_1-b_1>a_2-b_2$ folgt. Deswegen erhält man unter Anwendung von Lemma 1

$$a_1b_1<a_2b_2,\quad\text{d.h.}\quad (t-\tau)(t-2\pi+\tau)<(t-\pi+\tau)(t-\pi-\tau),$$

und weiter

$$\frac{e^{c\tau}\,e^{c(2\pi-\tau)}}{(t-\tau)^\beta(t-2\pi+\tau)^\beta}>\frac{e^{c(\pi-\tau)}\,e^{c(\pi+\ )}}{(t-\pi+\tau)^\beta(t-\pi-\tau)^\beta},\quad\text{d.h.}\quad Y_1Y_4>Y_2Y_3.$$

Anderseits ist Y monoton zunähmend, somit $Y_1<Y_2$ und $Y_3<Y_4$, mithin wird $Y_4-Y_1>Y_3-Y_2$. Daher nach Lemma 2 gilt

$$Y_1+Y_4>Y_2+Y_3 \text{ und folglich } \operatorname{sg}\int_{h\pi}^{(h+2)\pi}=(-1)^h .$$

Sonach hat man $(-v_{2q-1}+v_{2q})>0$, $(v_{2q}-v_{2q+1})<0$ und schließlich $v_{2q-1}<v_{2q}<v_{2q+1}$. Also ist die Folge $\{v_i\}$ monoton wachsend, wie oben erwähnt. Daraus aber ergeben sich für $y=(2q+\varepsilon')\pi$, $0\leqq\epsilon'\leqq1/2$

$$\int_0^y=(v_2-v_1)+(v_4-v_3)+\cdots\cdots+(v_{2q}-v_{2q-1})+v'_{2q+\varepsilon'}>0\,,$$

und für $y=(2q+1+\varepsilon')\pi$, $0\leqq\epsilon'\leqq1/2$

$$\int_0^y=-v_1-(v_3-v_2)-\cdots\cdots-(v_{2q+1}-v_{2q})-v'_{2q+1+\varepsilon'}<0\,.$$

Also verschwindet $U(y)$ nur auf dem zweiten und vierten Quadranten des Argumenten y (Modulo 2π).

Könnten wir erweisen, daß $V(y)$ auf dem oben genannten Quadranten keineswegs verschwindet, so würde es bewiesen werden, daß $W=U+iV\neq0$ in dem Gebiet $1>\alpha>0$, $x>\alpha-1$ ist. Zwar in diesem Gebiet kann man nach der vorigen Weise sehen, daß bezw. $V=-,\ +,\ +$ wird, je nachdem $y=2q\pi$, $(2q+1)\pi$ oder $(2q+1/2)\pi$ ist. Da aber das Zeichen von V für $y=(2q+3/2)\pi$ doch unklar ist, so, um den Beweis zu ergänzen, muß ich mich mit etwas anderen Methode behelfen.

Obgleich W eine analytische Funktion von

$$z=x+yi=r(\cos\theta+i\,\sin\theta)=y(c+i),\qquad c=\cot\theta$$

ist, vermag sie doch als diejenige von y allein gedacht werden, falls θ als fest betrachtet wird. Da wir schon den Falle $\theta=n\pi$ $(y=0)$ ausschlossen haben, so ist $W(z)=W(y,\theta)$ zwar regulär in bezug auf y. Folglich kann der Ausdruck (2) umformt werden zur neuen Gestalt:

$$W=U+iV=\int_0^1\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp\ \{(c+i)yt\}\,dt\,,\qquad(\alpha>0)$$

worin $c=\cot\theta$ $(\neq\infty)$ bloß als Parameter auftritt, und unabhängig von y ist. Wir gewinnen deshalb

$$\frac{dW}{dy}=\frac{c+i}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t(1-t)^{\alpha-1}\exp\{(c+i)yt\}\,dt\,,$$

was durch partielle Integration

$$\frac{dW}{dy}=\left(c+i-\frac{\alpha}{y}\right)W+\frac{1}{y\Gamma(\alpha)}\qquad(3)$$

liefert, und nochmalige Differentiation erteilt

$$\frac{d^2W}{dy^2}=\left[\left(c+i-\frac{\alpha}{y}\right)^2+\frac{\alpha}{y^2}\right]W+\left(c+i-\frac{1+\alpha}{y}\right)\frac{1}{y\Gamma(\alpha)}\,.\qquad(4)$$

Angenommen, nun es geschieht, daß

$$W=U+iV=0,\qquad(5)$$

dann müßen vermöge (3) und (4) gelten

$$\frac{dW}{dy}=\frac{dU}{dy}+i\frac{dV}{dy}=\frac{1}{y\Gamma(\alpha)},$$

$$\frac{d^2W}{dy^2}=\frac{d^2U}{dy^2}+i\frac{d^2V}{dy^2}=\left(c-\frac{1+\alpha}{y}\right)\frac{1}{y\Gamma(\alpha)}+\frac{i}{y\Gamma(\alpha)}.$$

Damit lauten für imaginäre Teile

$$V=0,\quad \frac{dV}{dy}=0,\quad \frac{d^2V}{dy^2}=\frac{1}{y\Gamma(\alpha)}\neq 0\,;$$

und daher muß dort ein Extremum vorhanden sein. Aber bei positivem $\alpha\neq 1$ hat dies keineswegs geschehen, wie wir schon oben so ausführlich gesehen haben. Demnach ist die Annahme (5) zwar unmöglich, was eben zu beweisen ist.

Infolgedessen kann man dartun auf ähnlicher Weise, wie in der Ende des Abschnittes 2, daß der Kurvenzug

$$H^\alpha e^z=U(x,y,\alpha)+i\,V(x,y,\alpha)=0$$

für den parametrige Wert $0<\alpha<1$ durchaus in der Linke der Gerade $x=\alpha-1$ liegen soll. Außerdem vermute ich, daß diese Kurven vielleicht von der Gerade $x=\alpha-1$ asymptotisch im Unendlichen berührt werden.

§ **4.** Bekanntlich verschwindet keine von beiden Funktionen $\cos z$, $\sin z$ bis auf reelle Achse, was auch bei etwaiges $\alpha>0$ für Funktionen

$$H^\alpha \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}/\Gamma(2n+\alpha+1),$$

sowie

$$H^\alpha \sin z=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,z^{2n-1}/\Gamma(2n+\alpha)$$

ebenso gut gilt. In der Tat haben beide reelle Funktionen

$$H^\alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} x=\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,\xi\,d\xi$$

für $2>\alpha\geqq 0$ bezw. für $1>\alpha\geqq 0$ je zwei Nullstellen zwischen $2n\pi$ und $2(n+1)\pi$ (jedoch für $\alpha>2$ bezw. $\alpha>1$ gibt es keine Nullstell außer $x=0$), wie man leicht nach den oben benutzten Methode zeigen kann. Also durch H^α-Verfahren bewegen sich die Nullstellen dieser Funktionen auf reeller Achse hin und wieder.

Zum Beispiele verschwindet die Funktion

$$H^1\cos z=\frac{\sin z}{z}=(\sin x\,\cosh y+i\,\cos x\,\sinh y)/(x+iy)$$

für $x=n\pi\,(n\neq 0)$ $y=0$. Da aber die dortige Determinante

$$D=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y}\\ \dfrac{\partial V}{\partial x} & \dfrac{\partial V}{\partial y}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{n^2\pi^2}\neq 0$$

ist, so muß je eine Kurve in der z-Ebene

$$U(x,y,\alpha)=0,\qquad V(x,y,\alpha)=0$$

durch den Punkt $(x=n\pi, y=0, \alpha=1)$ existieren. Alle diese Punkte liegen durchaus auf reeller Achse. Unsere Verfahren H^α bestimmt also eine homeomorphische Abbildung der Nullstellen von $\cos z$ auf diejenigen von $H^\alpha\cos z$ in der rellen Achse.