

KARAKTERAJ ECOJ DE LINIA KONTINUUMO

De

Mitio NAGUMO

(Communicated by Y. Watanabe, Oct. 1, 1950)

Linia kontinuumo signifas simple ordigitan sistemon kiu estas izomorfa je la sistemo de la realaj nombroj. En tiu ĉi noto ni volas montri, ke la linia kontinuumo karakteriĝas kiel kontinua simple ordigita sistemo kun simple transitiva grupo de aŭtomorfismoj.

1. Sistemo S estas *kontinua simple ordigita sistemo* en la sekvanta senco:

(I₁) Se $x_\nu \in S (\nu=1, 2)$, tiam ĝuste unu el la tri sekvantaj kazoj okazigas:

(1) $x_1 = x_2$, (2) $x_1 < x_2$, (3) $x_2 < x_1$.

(I₂) Se $x_1 < x_2$ kaj $x_2 < x_3$, tiam $x_1 < x_3$.

(I₃) (aksiomo de Dedekind) Estu S_1, S_2 partoj de S tiaj ke

$$S_1 \cup S_2 = S, \quad S_1 \cap S_2 = \{\}^{1)},$$

kaj $x_1 < x_2$ por ĉiuj $x_\nu \in S_\nu (\nu=1, 2)$. Tiam ekzistas ĝuste unu $x_0 \in S$ tia ke

$$x_1 \leq x_0 \leq x_2 \text{ por ĉiuj } x_\nu \in S_\nu (\nu=1, 2).$$

2. *Aŭtomorfismo* φ de S signifas 1-1 bildadon de S sur la saman S tia ke el $x_1 < x_2$ rezultas ke $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$. Sistemo $\mathfrak{A}$ de aŭtomorfismoj de S estas *simple transitiva grupo* en la sekvanta senco:

(II₁) Se $\varphi_\nu \in \mathfrak{A} (\nu=1, 2)$, tiam $\varphi_2 \varphi_1^{-1} \in \mathfrak{A}$.

(II₂) Por ĉiu paro x_1, x_2 el S ekzistas $\varphi \in \mathfrak{A}$ tia ke $\varphi(x_1) = x_2$.

(II₃) Se $\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$ por iu $x_0 \in S$, tiam $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ por ĉiu $x \in S$.

Lau bone konata maniero el (I) rezultas la ekzisteco de la *supra limo* de iu ajn supre barita parto de S .

TEOREMO. Se $\varphi_1(x_0) < \varphi_2(x_0)$ por iu $x_0 \in S$, tiam $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ por ĉiu $x \in S$.

Por prui tion ni bezonas la sekvantan:

¹⁾ $\{\}$ signifas la malplenan aron.

HELPA TEOREMO. Se $\varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi)$ por iu $\xi \in S$, tiam ekzistas ξ' kaj $\xi' \in S$ tiaj ke $\xi' < \xi < \xi'$ kaj $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ por $\xi' < x < \xi'$.

(*Pruvo*) Metu $\xi = \varphi_2^{-1}\varphi_1(\xi)$ kaj $\xi' = \varphi_1^{-1}\varphi_2(\xi)$, tiam $\varphi_2(\xi') = \varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi)$ kaj $\varphi_1(\xi') = \varphi_2(\xi) > \varphi_1(\xi)$. Sekve $\xi' < \xi < \xi'$. Por $\xi' < x \leq \xi$ ni havas $\varphi_1(x) \leq \varphi_1(\xi) = \varphi_2(\xi') < \varphi_2(x)$. Kaj por $\xi \leq x < \xi'$ ni havas $\varphi_1(x) < \varphi_1(\xi') = \varphi_2(\xi) \leq \varphi_2(x)$.

(*Pruvo de Teoremo*) Se ekzistus iu $x_1 > x_0$ tia ke $\varphi_1(x_1) > \varphi_2(x_1)$, tiam metu $\bar{x} = \sup\{x \mid x < x_1, \varphi_1(x) < \varphi_2(x)\} (\in S)$.

Do $x_0 \leq \bar{x} \leq x_1$. Se estus $\varphi_1(\bar{x}) \leq \varphi_2(\bar{x})$ (sen egaleco), tiam ekzistus, laŭ Helpa Teoremo, intervalo $\xi' < x < \xi'$ tia ke $\xi' < \bar{x} < \xi'$ kaj $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ por $\xi' < x < \xi'$. Tio kontraŭdiras kun la difino de $\bar{x}$. Sekve ni havas $\varphi_1(\bar{x}) = \varphi_2(\bar{x})$. Kaj el (II₃) rezultas ke $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ por ĉiu $x \in S$, kio kontraŭdiras kun $\varphi_1(x_0) < \varphi_2(x_0)$. En la simila maniero la ekzisteco de iu $x_1 < x_0$ tia ke $\varphi_1(x_1) < \varphi_2(x_1)$ kondukas nin al absurdeco. La teoremo estas do pruvita, ĉar la kazo $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1)$ estas ne ebla.

3. Nun elektu iu ajn difinitan elementon el S kaj nomu ĝin "0". Por ĉiu elemento $a \in S$ ekzistas laŭ (II₂) kaj (II₃) ĝuste unu $\varphi_a \in \mathfrak{H}$ tia ke $\varphi_a(0) = a$. Difinu la operacion $a \circ b$ por ĉiu paro a, b el S per

$$a \circ b = \varphi_b(a).$$

Tiam ni havas:

$$(III_1) \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \text{por ĉiuj } a, b, c \in S.$$

$$(III_2) \quad 0 \circ a = a \circ 0 = a \quad \text{por ĉiu } a \in S.$$

$$(III_3) \quad \text{Por ĉiu } a \in S \text{ ekzistas ĝuste unu } \bar{a} \text{ tia ke } a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = 0.$$

$$(III_4) \quad \text{Se } a_1 < a_2 (a_i \in S), \text{ tiam por ĉiu } x \in S \text{ veriĝas}$$

$$(1) \quad a_1 \circ x < a_2 \circ x, \quad (2) \quad x \circ a_1 < x \circ a_2.$$

$$(III_5) \quad (\text{aksiomo de Arkimedes}) \quad \text{Se } 0 < a \text{ kaj } 0 < b \ (a, b \in S), \text{ tiam ekzistas natura nombro } n \text{ tia ke}$$

$$na = \underbrace{a \circ a \circ \dots \circ a}_n > b.$$

$$(III_6) \quad a \circ b = b \circ a \text{ por ĉiu paro } a, b \text{ el } S \text{ (komutebleco de } \circ \text{)}.$$

$$(Pruvoj) \quad (III_1) \quad \text{La ambaŭ membroj de la egalajo egalas je } \varphi_c \varphi_b \varphi_a(0).$$

$$(III_2) \quad 0 \circ a = \varphi_a(0) = a. \text{ Kaj } \varphi_0(x) = x \text{ laŭ (II}_3\text{) ĉar } \varphi_0(0) = 0, \text{ sekve } a \circ 0 = \varphi_0(a) = a.$$

$$(III_3) \quad \text{Metu } \varphi_{\bar{a}}^{-1}(0) = \bar{a}, \text{ tiam } a \circ \bar{a} = \varphi_a \varphi_{\bar{a}}^{-1}(0) = 0. \text{ Kaj } \varphi_{\bar{a}}(x) = \varphi_{\bar{a}}^{-1}(x) \text{ laŭ (II}_3\text{), ĉar } \varphi_{\bar{a}}(0) = \varphi_{\bar{a}}^{-1}(0), \text{ sekve } \bar{a} \circ a = \varphi_{\bar{a}}(a) = \varphi_{\bar{a}}^{-1}(a) = 0.$$

$$(III_4) \quad (1) \quad a_1 \circ x = \varphi_{x_1}(a_1) < \varphi_{x_1}(a_2) = a_2 \circ x.$$

(2) El $\varphi_{a_1}(0) \leq \varphi_{a_2}(0)$ ($\varphi_{a_1}(0) = a_1$) rezultas ke $\varphi_{a_1}(x) \leq \varphi_{a_2}(x)$ laŭ Teoremo, nome $x \circ a_1 \leq x \circ a_2$.

(III₅) kaj (III₆) sekvas el I₁-I₃ kaj III₁-III₄. Vidu la libron “Koncepto de la nombroj” (japone) de Prof. Takagi, (1949 el Iwanami) p. 92.

Konsekvence ni povas skribi $a+b$ anstataŭ $a \cdot b$. La ecoj I₁-I₃ kaj III₁-III₃ montras ke S estas izomorfa je la sistemo de la realaj nombroj. Komparu la cititan libron de Prof. Takagi.

Osaka University.